Я.Я.Выгодский

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

(таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики)

ОГЛАВЛЕНИЕ

III. АЛГЕБРА

IV. ГЕОМЕТРИЯ

А. Геометрическое построения

1. Назначение справочника.

Этот справочник имеет двоякое назначение. Во-первых, здесь можно навести «моментальную» справку: что такое общин наибольший делитель, что такое тангенс и т. п., как вычислить процент, как построить правильный пятиугольник и т. п.; каковы формулы для корней квадратного уравнения, для объема усеченного конуса и т. п. Все определения, правила, формулы и теоремы сопровождаются примерами; при этом особое снимание уделяется примерам практического характера. Всюду, где это требуется, указывается, в каких случаях и как надо применять то или иное правило, каких ошибок надо избегать и т. п.

Во-вторых, этот справочник, по замыслу автора, мог бы служить общедоступным пособием для повторения курса элементарной математики и даже для первого ознакомления с ее практическими применениями.

2. Справочник и учебник.

Мысль о том, что по *справочнику* можно *учиться,* способна вызвать сомнения. Однако, судя по читательским письмам (число которых превышает 1500), подавляющее большинство потребителей успешно пользовалось справочником именно для этой цели.

Быть может, наименование «справочник» и не вполне соответствует .характеру этой книги. Но на 21 году ее жизни вряд ли целесообразно менять ее название. С другой же стороны, еще менее подошло бы к ней название «учебник» или «учебное пособие». Такое название вызывало бы представление об учебнике школьного типа. Между тем данный справочник по своему характеру существенно отличается от школьного учебника.

В школьном учебнике, особенно в учебнике для старших классов, *ведущую роль* играет рассуждение; фактический материал как бы подчинен логическому аппарату. Во всяком случае таково *восприятие учащегося.* Здесь же ведущую роль играет фактический материал. Это не означает, что здесь нет рассуждений. Напротив, иной раз читатель встретится и с логическим выводом той или иной формулы; но эти выводы проводятся лишь по особым поводам. Иногда, например, надо подчеркнуть руководящую идею данного раздела (скажем, вывести формулу квадратного уравнения); иногда надо преодолеть чувство недоверия к результату (скажем, к действиям над комплексными числами). Где можно опустить доказательство, а где нельзя— при решении этого вопроса автор руководился педагогическим опытом.

3.Как пользоваться справочником.

«Моментальная» справка наводится с помощью алфавитного указателя, помещенного в конце книги. На случай, если читатель не знает наименования правила, теоремы, способа решения и т. п., к его услугам подробное оглавление (в начале книги). Все таблицы помещены в первом разделе справочника.

Наводя справку в каком-либо одном месте, вы встретите там ссылки на все те параграфы, где разъяснены упоминаемые термины. Римскими цифрами обозначены номера разделов; арабскими—номера параграфов. Не пренебрегайте этими ссылками! Всякому же, кто обращается к справочнику не по случайному поводу, рекомендуется «насквозь» прочесть интересующий его раздел.

В частности, полезно *внимательно* прочесть исторические сведения, содержащиеся в каждом разделе. Они составляют органическую часть книги и содействуют лучшему пониманию материала.

Читатель, который будет учиться по этой книге, должен обратить особое внимание на примеры. Доказательства, опущенные в справочнике, читатель может восполнить (по учебнику) либо одновременно с чтением справочника, либо позднее. Но ни справочник, ни учебник не будет достаточным без *самостоятельных* упражнений в решении примеров и задач.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЯ

1. Назначение справочника. Этот справочник имеет двоякое назначение. Во-первых, здесь можно навести «моментальную» справку: что такое общий наибольший делитель, что такое тангенс и т. п., как вычислить процент, как построить правильный пятиугольник и т. п.; каковы формулы для корней квадратного уравнения, для объема усеченного конуса и т. п. Все определения, правила, формулы и теоремы сопровождаются примерами; при этом особое внимание уделяется примерам практического характера. Всюду, где это требуется, указывается, в каких случаях и как надо применять то или иное правило, каких ошибок надо избегать и т. п.

Во-вторых, этот справочник, по замыслу автора, мог бы служить общедоступным пособием для повторения курса элементарной математики и даже для первого ознакомления с ее практическими применениями.

2. Справочник и учебник. Мысль о том, что по *справочнику* можно *учиться*, способна вызвать сомнения. Однако, судя по читательским письмам (число которых превышает 1500), подавляющее большинство потребителей успешно пользовалось справочником именно для этой цели.

Быть может, наименование «справочник» и не вполне соответствует характеру этой книги. Но на 21 году ее жизни вряд ли целесообразно менять ее название. С другой же стороны, еще менее подошло бы к ней название «учебник» или «учебное пособие». Такое название вызывало бы представление об учебнике школьного типа. Между тем данный справочник по своему характеру существенно отличается от школьного учебника.

В школьном учебнике, особенно в учебнике для старших классов, *ведущую роль* играет рассуждение; фактический материал как бы подчинен логическому аппарату. Во всяком случае таково *восприятие учащегося*. Здесь же ведущую роль играет фактический материал. Это не означает, что здесь нет рассуждений. Напротив, иной раз читатель встретится и с логическим выводом той или иной формулы; но эти выводы проводятся лишь по особым поводам. Иногда, например, надо подчеркнуть руководящую идею данного раздела (скажем, вывести формулу квадратного уравнения); иногда надо преодолеть чувство недоверия к результату (скажем, к действиям над комплексными числами). Где можно опустить доказательство, а где нельзя — при решении этого вопроса автор руководился педагогическим опытом.

3. Как пользоваться справочником. «Моментальная» справка наводится с помощью алфавитного указателя, помещенного в конце книги. На случай, если читатель не знает наименования правила, теоремы, способа решения и т. п., к его услугам подробное оглавление (в начале книги). Все таблицы помещены в первом разделе справочника.

Наводя справку в каком-либо одном месте, вы встретите там ссылки на все те параграфы, где разъяснены упоминаемые термины. Римскими цифрами обозначены номера разделов; арабскими — номера параграфов. Не пренебрегайте этими ссылками! Всякому же, кто обращается к справочнику не по случайному поводу, рекомендуется «насквозь» прочесть интересующий его раздел.

В частности, полезно *внимательно* прочесть исторические сведения, содержащиеся в каждом разделе. Они составляют органическую часть книги и содействуют лучшему пониманию материала.

Читатель, который будет учиться по этой книге, должен обратить особое внимание на примеры. Доказательства, опущенные в справочнике, читатель может восполнить (по учебнику) либо одновременно с чтением справочника, либо позднее. Но ни справочник, ни учебник не будет достаточным без *самостоятельных* упражнений в решении примеров и задач.

Лицам, изучающим математику без преподавателя, автор рекомендует обратиться к «Сборнику задач по элементарной математике» Н. П. Антонова, М. Я. Выгодского, В. В. Никитина и А. И. Санкина.

4. Содержание справочника. Руководствуясь пожеланиями читателей, автор неоднократно расширял материал справочника, и в настоящем своем виде книга охватывает почти все вопросы школьной программы, за исключением нововведений последнего времени. Речь идет

прежде всего о счетной линейке и основах высшей математики.

Дополнить справочник главой о счетной линейке, где наряду с инструкцией содержалось бы *общедоступное* обоснование правил, автор считает безусловно необходимым. Что касается основ высшей математики, то автор отсылает пока читателя к своему «Справочнику по высшей математике» (5-е дополненное издание его вышло в 1962 г.).

Многие читатели выражают пожелание о включении в раздел «Арифметика» сведений об обращении периодической дроби в простую. Считая этот вопрос мало важным для практики, автор однако, выполнит это пожелание при первой возможности.

В настоящее, 14-е издание включены следующие важные для практики дополнения: извлечение кубического корня, приближенная формула площади сегмента, формула Гюйгенса для длины дуги.

Автору представляется целесообразным заново написать весь раздел геометрии, придав ему более систематический характер и приблизив по форме изложения к разделам арифметики и алгебры.

Многие читатели хотели бы найти в справочнике указания о способах решения «типовых» примеров и задач. Особенно часто упоминается о так называемых логарифмических и показательных уравнениях. Такие указания читатель найдет в вышеупомянутом «Сборнике задач», вводить их в справочник автор не видит необходимости.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую признательность всем лицам, приславшим свои отзывы и пожелания, и заранее благодарит всех, кто пожелает поделиться с ним своими предложениями.

Особо я должен поблагодарить (помимо лиц, упомянутых в предыдущих изданиях) следующих читателей:

Брускина Ц. Я. (Москва), Бунакова В. Е. (Тбилиси), Вексельберга П. Б. (Черновцы), Вострикову Л. (Воронеж), Вяземского К. Ф. (Изюм), Горшанова И. П. (Резекне), Грибовского В. К. (Гольцы), Жикова В. (Нальчик), Жучкова В. П. (Томск), Зазимко Д. А. (Симферополь), Каплина В. В. (Арцыз; Одесской обл.), Коваленко Н. (пос. Таежный, Красноярского края), Козлитину С. (Ставрополь краевой), Ледомского Г. А. (станица Ново-Леушковская), Лехтцнера Х. И. (Вильнюс), Макарова В. (Соликамск), Михайлова А. П. (Ленинград), Мичеровского Д. К. (Козельск), Окатьева А. А. (Нижний Тагил),

Певзнера В. Г., Резника А. А. (с. Осипенко, Запорожской обл.), Рябинина Б. А. (Москва), Сорокину Н. (Федосеево, Московской обл.), Сорокина И. Н. (Томск), Степанова В. М. (Ростов н/Д), Третьякова Н. И. (Дунаевцы, Хмельницкой обл.), Тютюнника А. Н. (Кронштадт), Фриева К. А. (Беслан), Шпилькина В. (Москва), Ярового А. (Куйвзи, Ленинградской обл.).

М. Выгодский

17 января 1962 г.

ОТ ГЛАВНОЙ РЕДАКЦИИ

Семнадцатое издание подготовлено к печати без участия автора — профессора Марка Яковлевича Выгодского, скончавшегося 26 сентября 1965 года. Это издание печатается с матриц 14-го издания; исправлены лишь замеченные опечатки.

К сожалению, Марк Яковлевич не успел осуществить своих намерений по переработке Справочника: в частности, написать главу о счетной линейке, расширить главу «Функции; графики», заново написать раздел IV «Геометрия», включить в раздел II «Арифметика» сведения об обращении периодической дроби в простую.

I. ТАБЛИЦЫ

§ 1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1416	0,4971	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6828	$\bar{1}{,}8343$
2π	6,2832	0,7982	$\sqrt[3]{\pi:6}$	0,8060	$\bar{1}{,}9063$
3π	9,4248	0,9743	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6204	$\bar{1}{,}7926$
4π	12,5664	1,0992	$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,1450	0,3314
$4\pi:3$	4,1888	0,6221	e	2,7183	0,4343
$\pi:2$	1,5708	0,1961	e^2	7,3891	0,8686
$\pi:3$	1,0472	0,0200	$\sqrt{e}$	1,6487	0,2171
$\pi:4$	0,7854	$\bar{1}{,}8951$	$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448
$\pi:6$	0,5236	$\bar{1}{,}7190$	$1:e$	0,3679	$\bar{1}{,}5657$
$\pi:180$	0,0175	$\bar{2}{,}2419$	$1:e^2$	0,1353	$\bar{1}{,}1314$
$2:\pi$	0,6366	$\bar{1}{,}8039$	$\sqrt{1:e}$	0,6065	$\bar{1}{,}7829$
$180:\pi$	57,2958	1,7581	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165	$\bar{1}{,}8552$
$10800:\pi$	3437,7467	3,5363	$M=\lg e$	0,4343	$\bar{1}{,}6378$
$648000:\pi$	206264,81	5,3144	$\frac{1}{M}=\ln 10$	2,3026	0,3622
$1:\pi$	0,3183	$\bar{1}{,}5029$	$2!$	2	
$1:2\pi$	0,1592	$\bar{1}{,}2018$	$3!$	6	
$1:3\pi$	0,1061	$\bar{1}{,}0257$	$4!$	24	
$1:4\pi$	0,0796	$\bar{2}{,}9008$	$5!$	120	
π^2	9,8696	0,9943	$6!$	720	
$2\pi^2$	19,7392	1,2953	$7!$	5040	
$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	$8!$	40320	
$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991	$9!$	362880	
$\sqrt{\pi:2}$	1,2533	0,0981	$10!$	3628800	
$\sqrt{1:\pi}$	0,5642	$\bar{1}{,}7514$	$11!$	39916800	
$\sqrt{2:\pi}$	0,7979	$\bar{1}{,}9019$	$12!$	479001600	
$\sqrt{3:\pi}$	0,9772	$\bar{1}{,}9900$			
$\sqrt{4:\pi}$	1,1284	0,0525			
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657			

§ 10. Таблица простых чисел, не превосходящих 6000

2	193	449	733	1031	1321	1637	1997	2333
3	197	457	739	1033	1327	1657	1999	2339
5	199	461	743	1039	1361	1663	2003	2341
7	211	463	751	1049	1367	1667	2011	2347
11	223	467	757	1051	1373	1669	2017	2351
13	227	479	761	1061	1381	1693	2027	2357
17	229	487	769	1063	1399	1697	2029	2371
19	233	491	773	1069	1409	1699	2039	2377
23	239	499	787	1087	1423	1709	2053	2381
29	241	503	797	1091	1427	1721	2063	2383
31	251	509	809	1093	1429	1723	2069	2389
37	257	521	811	1097	1433	1733	2081	2393
41	263	523	821	1103	1439	1741	2083	2399
43	269	541	823	1109	1447	1747	2087	2411
47	271	547	827	1117	1451	1753	2089	2417
53	277	557	829	1123	1453	1759	2099	2423
59	281	563	839	1129	1459	1777	2111	2437
61	283	569	853	1151	1471	1783	2113	2441
67	293	571	857	1153	1481	1787	2129	2447
71	307	577	859	1163	1483	1789	2131	2459
73	311	587	863	1171	1487	1801	2137	2467
79	313	593	877	1181	1489	1811	2141	2473
83	317	599	881	1187	1493	1823	2143	2477
89	331	601	883	1193	1499	1831	2153	2503
97	337	607	887	1201	1511	1847	2161	2521
101	347	613	907	1213	1523	1861	2179	2531
103	349	617	911	1217	1531	1867	2203	2539
107	353	619	919	1223	1543	1871	2207	2543
109	359	631	929	1229	1549	1873	2213	2549
113	367	641	937	1231	1553	1877	2221	2551
127	373	643	941	1237	1559	1879	2237	2557
131	379	647	947	1249	1567	1889	2239	2579
137	383	653	953	1259	1571	1901	2243	2591
139	389	659	967	1277	1579	1907	2251	2593
149	397	661	971	1279	1583	1913	2267	2609
151	401	673	977	1283	1597	1931	2269	2617
157	409	677	983	1289	1601	1933	2273	2621
163	419	683	991	1291	1607	1949	2281	2633
167	421	691	997	1297	1609	1951	2287	2647
173	431	701	1009	1301	1613	1973	2293	2657
179	433	709	1013	1303	1619	1979	2297	2659
181	439	719	1019	1307	1621	1987	2309	2663
191	443	727	1021	1319	1627	1993	2311	2671

2677	3011	3373	3727	4093	4481	4871	5233	5639
2683	3019	3389	3733	4099	4483	4877	5237	5641
2687	3023	3391	3739	4111	4493	4889	5261	5647
2689	3037	3407	3761	4127	4507	4903	5273	5651
2693	3041	3413	3767	4129	4513	4909	5279	5653
2699	3049	3433	3769	4133	4517	4919	5281	5657
2707	3061	3449	3779	4139	4519	4931	5297	5659
2711	3067	3457	3793	4153	4523	4933	5303	5669
2713	3079	3461	3797	4157	4547	4937	5309	5683
2719	3083	3463	3803	4159	4549	4943	5323	5689
2729	3089	3467	3821	4177	4561	4951	5333	5693
2731	3109	3469	3823	4201	4567	4957	5347	5701
2741	3119	3491	3833	4211	4583	4967	5351	5711
2749	3121	3499	3847	4217	4591	4969	5381	5717
2753	3137	3511	3851	4219	4597	4973	5387	5737
2767	3163	3517	3853	4229	4603	4987	5393	5741
2777	3167	3527	3863	4231	4621	4993	5399	5743
2789	3169	3529	3877	4241	4637	4999	5407	5749
2791	3181	3533	3881	4243	4639	5003	5413	5779
2797	3187	3539	3889	4253	4643	5009	5417	5783
2801	3191	3541	3907	4259	4649	5011	5419	5791
2803	3203	3547	3911	4261	4651	5021	5431	5801
2819	3209	3557	3917	4271	4657	5023	5437	5807
2833	3217	3559	3919	4273	4663	5039	5441	5813
2837	3221	3571	3923	4283	4673	5051	5443	5821
2843	3229	3581	3929	4289	4679	5059	5449	5827
2851	3251	3583	3931	4297	4691	5077	5471	5839
2857	3253	3593	3943	4327	4703	5081	5477	5843
2861	3257	3607	3947	4337	4721	5087	5479	5849
2879	3259	3613	3967	4339	4723	5099	5483	5851
2887	3271	3617	3989	4349	4729	5101	5501	5857
2897	3299	3623	4001	4357	4733	5107	5503	5861
2903	3301	3631	4003	4363	4751	5113	5507	5867
2909	3307	3637	4007	4373	4759	5119	5519	5869
2917	3313	3643	4013	4391	4783	5147	5521	5879
2927	3319	3659	4019	4397	4787	5153	5527	5881
2939	3323	3671	4021	4409	4789	5167	5531	5897
2953	3329	3673	4027	4421	4793	5171	5557	5903
2957	3331	3677	4049	4423	4799	5179	5563	5923
2963	3343	3691	4051	4441	4801	5189	5569	5927
2969	3347	3697	4057	4447	4813	5197	5573	5939
2971	3359	3701	4073	4451	4817	5209	5581	5953
2999	3361	3709	4079	4457	4831	5227	5591	5981
3001	3371	3719	4091	4463	4861	5231	5623	5987

§ 11. Некоторые математические обозначения

$=$	равно	например	$a = b$
$\neq$	не равно	»	$a \neq b$
$\approx$	приближенно равно	»	$a \approx b$
$>$	больше	»	$5 > 2$
$<$	меньше	»	$3 < 10$
$\geqslant$	больше или равно	»	$a \geqslant b$
$\leqslant$	меньше или равно	»	$a \leqslant b$
$\mid \ \mid$	абсолютное значение	»	$\mid a \mid$
$\sqrt[n]{\ }$	корень *n*-й степени	»	$\sqrt[3]{8} = 2$
!	факториал	»	$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
$\log_b$	логарифм при основании b	»	$\log_2 8 = 3$
lg	логарифм десятичный	»	$\lg 100 = 2$
ln	логарифм натуральный (при основании e)		
lim	предел		
const	постоянная величина		
Σ	сумма		
$\triangle$	треугольник	например	$\triangle ABC$
$\angle$	угол	»	$\angle ABC$
$\smile$	дуга	»	$\overset{\smile}{AB}$
$\parallel$	параллельно	»	$AB \parallel CD$
$\perp$	перпендикулярно	»	$AB \perp CD$
$\backsim$	подобно	»	$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$
π	отношение длины окружности к диаметру		
$^\circ$	градус		
$'$	минута	например	$10^\circ 30' 35''$
$''$	секунда		
sin	синус	»	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
cos	косинус	»	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
tg	тангенс	»	$\operatorname{tg} 40^\circ = 0{,}8391$
ctg	котангенс	»	$\operatorname{ctg} 25^\circ 10' = 2{,}128$
sc	секанс	»	$\operatorname{sc} 60^\circ = 2$
csc	косеканс	»	$\csc 90^\circ = 1$
arcsin	арксинус	»	$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$
arccos	арккосинус	»	$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$
arctg	арктангенс	»	$\operatorname{arctg} 0{,}8391 = 40^\circ$
arcctg	арккотангенс	»	$\operatorname{arcctg} 2{,}128 = 25^\circ 10'$
arcsc	арксеканс	»	$\operatorname{arcsc} 2 = 60^\circ$
arccsc	арккосеканс	»	$\operatorname{arccsc} 1 = 90^\circ$

§ 12. Метрическая система мер

Меры длины

1 километр (*км*) = 1000 метрам (*м*),
1 метр (*м*) = 10 дециметрам (*дм*) = 100 сантиметрам (*см*),
1 дециметр (*дм*) = 10 сантиметрам (*см*),
1 сантиметр (*см*) = 10 миллиметрам (*мм*).

Меры площади

1 кв. километр ($км^2$) = 1 000 000 кв. метрам ($м^2$),
1 кв. метр ($м^2$) = 100 кв. дециметрам ($дм^2$) =
= 10 000 кв. сантиметрам ($см^2$),
1 гектар (*га*) = 100 арам (*а*) = 10 000 кв. метрам ($м^2$),
1 ар (*а*) = 100 кв. метрам ($м^2$).

Меры объема

1 куб. метр ($м^3$) = 1000 куб. дециметрам ($дм^3$) =
= 1 000 000 куб. сантиметрам ($см^3$),
1 куб. дециметр ($дм^3$) = 1000 куб. сантиметрам ($см^3$),
1 литр (*л*) = 1 куб. дециметру ($дм^3$),
1 гектолитр (*гл*) = 100 литрам (*л*).

Меры веса

1 тонна (*т*) = 1000 килограммам (*кг*),
1 центнер (ц) = 100 килограммам (кг),
1 килограмм (*кг*) = 1000 граммам (*г*),
1 грамм (*г*) = 1000 миллиграммам (*мг*).

§ 13. Некоторые старые русские меры

Меры длины

1 верста = 500 саженям = 1500 аршинам = 3500 футам =
= 1066,8 *м*,
1 сажень = 3 аршинам = 48 вершкам = 7 футам =
= 84 дюймам = 2,1336 *м*,
1 аршин = 16 вершкам = 71,12 *см*,
1 вершок = 4,450 *см*,
1 фут = 12 дюймам = 0,3048 *м*,
1 дюйм = 2,540 *см*,
1 морская миля = 1852,2 *м*.

Меры веса

1 пуд = 40 фунтам = 16,380 *кг*,
1 фунт = 0,40951 *кг*.

§ 14. Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Название	Печатные буквы	Рукописные буквы	Название
A a	A a	а	*N n*	N n	эн
B b	B b	бэ	*O o*	O o	о
C c	C c	цэ	*P p*	P p	пэ
D d	D d	дэ	*Q q*	Q q	ку
E e	E e	э	*R r*	R r	эр
F f	F f	эф	*S s*	S s	эс
G g	G g	гэ (же)	*T t*	T t	тэ
H h	H h	ха (аш)	*U u*	U u	у
I i	I i	и	*V v*	V v	вэ
J j	J j	йот (жи)	*W w*	W w	дубль вэ
K k	K k	ка	*X x*	X x	икс
L l	L l	эль	*Y y*	Y y	игрек
M m	M m	эм	*Z z*	Z z	зет (дзет)

§ 15. Греческий алфавит

Α α	альфа	Ν ν	ню (ни)
Β β	бэта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзета	Σ σ	сигма
Η η	эта	Τ τ	тау
Θ θ, ϑ	тэта	Φ φ	фи
Ι ι	йота	Χ χ	хи
Κ κ	каппа	Υ υ	юпсилон (ипсилон)
Λ λ	ламбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю (ми)	Ω ω	омега

II. АРИФМЕТИКА

§ 1. Предмет арифметики

Арифметика — это наука о числах. Название «арифметика» происходит от греческого слова «аритмо́с» (по другому произношению «арифмо́с»), что означает «число». В арифметике изучаются простейшие свойства чисел и правила вычислений. Более глубокие свойства чисел изучаются в *теории чисел*.

§ 2. Целые (натуральные) числа

Первые представления о числе приобретены людьми в незапамятной древности (см. § 3). Они возникли из счета людей, животных, плодов, различных изделий человека и других предметов. Результатом счета являются числа один, два, три и т. д. Эти числа называются теперь *натуральными*. В арифметике их называют также *целыми* числами (наименование «целое число» имеет в математике и более широкий смысл; см. III, 3).

Понятие о натуральном числе является одним из простейших понятий. Его можно пояснить лишь предметным показом [1]).

Ряд целых чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

продолжается без конца; он называется *натуральным рядом*.

§ 3. Границы счета

На ранних ступенях развития общества люди почти не умели считать. Они отличали друг от друга совокупности двух и трех предметов; всякая совокупность, содер-

---

[1]) Евклид (III в. до н. э.) определял число (натуральное) как «множество, составленное из единиц»; такого рода определения можно найти и во многих нынешних учебниках. Но слово «множество» (или «собрание», или «совокупность» и т. п.) отнюдь не понятнее слова «число».

жавшая большее число предметов, объединялась в понятии «много». Это был еще *не счет, а лишь его зародыш.*

Впоследствии способность различать друг от друга небольшие совокупности развивалась; возникли слова для обозначений понятий «четыре», «пять», «шесть», «семь». Последнее слово длительное время обозначало также неопределенно большое количество. Наши пословицы сохранили память об этой эпохе («семь раз отмерь — один раз отрежь», «у семи нянек дитя без глазу», «семь бед — один ответ» и т. д.).

С усложнением хозяйственной деятельности людей понадобилось вести счет в более обширных пределах. Для этого человек пользовался окружавшими его предметами как инструментами счета: он делал зарубки на палках и на деревьях, завязывал узлы на веревках, складывал камешки в кучки и т. п. [1]).

Особо важную роль играл природный инструмент человека — его пальцы. Этот инструмент не мог длительно хранить результат счета, но зато всегда был налицо и отличался большой подвижностью. Язык первобытного человека был беден; жесты возмещали недостаток слов, и числа, для которых еще не было названий, «показывались» на пальцах (мы тоже прибегаем к показу чисел на пальцах, когда объясняемся с человеком, не знающим нашего языка).

Естественно, что вновь возникавшие названия «больших» чисел часто строились на основе числа 10 — по количеству пальцев на руках; у некоторых народов возникали также названия чисел на основе числа 5 — по количеству пальцев на одной руке или на основе числа 20 — по количеству пальцев на руках и на ногах (см. § 4).

На первых порах расширение запаса чисел происходило медленно. Сначала люди овладели счетом в пределах нескольких первых десятков и лишь позднее дошли до сотни. У многих народов число 40 долгое время было пределом счета и названием неопределенно большого количества. В русском языке слово «сороконожка» имеет смысл «многоножка»; выражение «сорок сорокóв» означало в старину число, превосходящее всякое воображение. Тот же смысл имеет слово «сорок» в ряде русских пословиц и

---

[1]) От счета с помощью камешков ведут свое начало различные усовершенствованные инструменты, как, например, русские счеты, китайские счеты «сван-пан», древнеегипетский «абак» (доска, разделенная на *полосы, куда клались жетоны*). *Аналогичные инструменты существовали* у многих народов. В латинском языке понятие «счет» выражается словом calculatio (отсюда и наше слово «калькуляция»); оно происходит от слова calculus, означающего «камешек».

поговорок («и один глаз, да зорок, не надо и сорок», «сидела сорок лет, высидела сорок реп» и др.).

На следующей ступени счет достигает нового предела: десяти десятков, и создается название для числа 100. Вместе с тем слово «сто» приобретает смысл неопределенно большого числа [1]). Такой смысл оно имеет, например, в загадке: *стоит поп низок, на нем сто ризок* (капуста). Такой же смысл потом приобретают последовательно числа тысяча, десять тысяч (в старину это число называлось «тьма»), миллион.

§ 4. Десятичная система счисления

В современном русском языке, а также в языках других народов названия всех чисел до миллиона составляются из 37 слов, обозначающих числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 (например, девятьсот восемнадцать тысяч семьсот сорок два). В свою очередь названия этих 37 чисел, как правило, образованы из названий чисел первого десятка (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и чисел 10, 100, 1000 (например, 18 = восемь на́ десять, 30 = тридесять, т. е. три десятка, 300 = триста, т. е. три сотни). В основе этого словообразования лежит число 10, и потому наша система наименований называется *десятичной системой счисления*. Исключительная роль, принадлежащая числу 10, объясняется тем, что на руках у нас 10 пальцев (см. § 3).

Из упомянутого правила в разных языках имеются различные исключения, объясняющиеся историческими особенностями развития счета. В русском языке единственным исключением является наименование «сорок» (прежде наряду с ним употреблялось и слово «четыредесят»). Это исключение можно поставить в связь с тем, что число 40 играло некогда особую роль, означая неопределенно большое количество (см. § 3) [2]).

[1]) *В некоторых языках одно и то же слово означает и* 40 и 100; ср. сноску [1]) на следующей странице.

[2]) Словом «сорок» (иначе, «сорочка») в древней Руси называли большой мешок, куда укладывались ценные соболиные шкурки.

Слово «девяносто» не представляет исключения из упомянутого правила, но оно образовано по другому способу (девять до ста). *Этим же* способом составляются числительные 80 и 90 в тюркских языках (см. сноску на стр. 58) *и* числительные 70, 80, 90 в готском (древнегерманском) языке (sibuntehund, т. е. «семь под сто» и т. д.). В русском языке наряду со словом «девяносто» употреблялось прежде и слово «девятьдесят».

В тюркских языках (азербайджанском, узбекском, туркменском, казахском, татарском, турецком и др.) исключение составляют наименования чисел 20, 30, 40, 50, тогда как названия чисел 60, 70, 80, 90 образованы из наименований для 6, 7, 8, 9 [1]). В монгольском языке, наоборот, наименования чисел 20, 30, 40, 50 следуют общему правилу, а наименования 60, 70, 80, 90 составляют исключение. Во французском языке сохранились недесятичные названия чисел 20 и 80, причем 80 именуется quatrevingt, т. е. «четыре двадцать». Здесь мы имеем остаток древнего двадцатеричного счисления (по числу пальцев на руках и ногах). В латинском языке наименование числа 20 тоже недесятичное (viginti), но наименование 80 (octoginta) — десятичное; оно произведено от 8 (octo). Зато наименования чисел 18 и 19 образованы из названия 20 с помощью вычитания: 20—2 и 20—1 (duodeviginti, undeviginti, т. е. «два от двадцати», «один от двадцати»).

Наименования чисел 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 во всех современных языках построены на десятичной основе.

§ 5. Развитие понятия числа

При счете отдельных предметов единица есть наименьшее число; делить ее на доли не нужно, а часто и нельзя (при счете камней прибавление к двум камням половины третьего дает 3 камня, а не $2\frac{1}{2}$, а избрать президиум в составе $2\frac{1}{2}$ человек — невозможно). Однако делить единицу на доли приходится уже при грубых *измерениях* величин, например при измерении длины шагами ($2\frac{1}{2}$ шага и т. д.). Поэтому уже в отдаленные эпохи создалось понятие *дробного числа* (см. II, 16 и II, 31). В дальнейшем оказалось необходимым еще более расширить понятие числа; последовательно появились числа *иррациональные* (III, 27), *отрицательные* (III, 3) и *комплексные* (III, 28 и III, 34).

---

[1]) В татарском языке числа первого десятка называются: бер (1), икé (2), еч (3), д ́рт (4), биш (5), алты́ (6), жидé (7), сигéз (8), туѓыз (9), ун (10). Десятки же именуются: егермé (20), уты́з (30), кы́рык (40), иллé (50), алтмы́ш (60), житмéш (70), сиксéн (80), туксáн (90).

Наряду с названием «йөз» для числительного 100 существует наименование «сан»; это же слово может означать и 40.

Довольно поздно к семье чисел присоединился нуль. Первоначально слово «нуль» означало отсутствие числа (буквальный смысл латинского слова nullum — «ничто»). Действительно, если, например, от 3 отнять 3, то не остается ничего. Для того чтобы это «ничего» считать числом, появились основания лишь в связи с рассмотрением отрицательных чисел (см. III, 3).

§ 6. Цифры

Цифра — это письменный знак, изображающий число (первоначально слово «цифра» имело другой смысл; см. II, 7, п. 6). В древнейшие времена числа обозначались прямолинейными пометками («палочками»): одна палочка изображала единицу, две палочки — двойку и т. д. Этот способ записи происходит от зарубок. Он и поныне сохранился в «римских цифрах» (II, 7, п. 5) для изображения чисел 1, 2, 3.

Для изображения сколько-нибудь больших чисел этот способ был непригоден. Поэтому появились особые знаки для числа 10 (в согласии с десятичным счетом, см. II, 4), а у некоторых народов и для числа 5 (в соответствии с пятеричным счетом, по числу пальцев на одной руке). Позднее были созданы знаки для бо́льших чисел. Знаки эти у разных народов имели разную форму и с течением времени видоизменялись. Различны были и *системы нумерации*, т. е. способы соединения цифр для изображения больших чисел. Однако в большинстве систем нумерации основное значение имеет *десятичная основа* в *соответствии с преобладанием* десятичной системы счисления (II, 4).

§ 7. Системы нумерации некоторых народов

1. Древнегреческая нумерация. В древнейшее время в Греции была распространена так называемая *аттическая* нумерация. Числа 1, 2, 3, 4 обозначались черточками |, ||, |||, ||||. Число 5 записывалось знаком 𐅃 (древнее начертание буквы «пи», с которой начинается слово «пенте» — пять); числа 6, 7, 8, 9 обозначались

ΓI, ΓII, ΓIII, ΓIIII. Число 10 обозначалось Δ (начальной буквой слова «дека» — десять). Числа 100, 1000 и 10 000 обозначались Η, Χ, Μ — начальными буквами соответствующих слов. Числа 50, 500, 5000 обозначались комбинациями знаков 5 и 10, 5 и 100, 5 и 1000, а именно: 𐅄, 𐅅, 𐅆. Остальные числа в пределах первого десятка тысяч записывались так:

ΗΗ𐅄ΓΙ=256, ΧΧ𐅄Ι=2051,

ΗΗΗ𐅄ΔΔΔΙΙ=382, 𐅆ΧΧ𐅅ΗΗΗ=7800

и т. д.

В третьем веке до н. э. аттическая нумерация была вытеснена так называемой *ионийской* системой. В ней числа 1 — 9 обозначаются первыми девятью буквами алфавита [1]):

$$\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=3,\ \delta=4,\ \varepsilon=5,\ \varsigma=6,\ \zeta=7,\ \eta=8,\ \vartheta=9;$$

числа 10, 20, 30, ..., 90 — следующими девятью буквами:

$$\iota=10,\ \varkappa=20,\ \lambda=30,\ \mu=40,\ \nu=50,\ \xi=60,\ o=70,$$
$$\pi=80,\ ϙ=90;$$

числа 100, 200, ..., 900 — последними девятью буквами:

$$\rho=100,\ \sigma=200,\ \tau=300,\ \upsilon=400,\ \varphi=500,\ \chi=600,$$
$$\psi=700,\ \omega=800,\ ϡ=900.$$

Для обозначения тысяч и десятков тысяч пользовались теми же цифрами с добавлением особого значка ' сбоку:

$${}'\alpha=1000,\ {}'\beta=2000 \text{ и т. д.}$$

Для отличия цифр от букв, составлявших слова, писали черточки над цифрами. Примеры: $\overline{\iota\eta}=18$; $\overline{\mu\zeta}=47$; $\overline{\upsilon\zeta}=407$; $\overline{\chi\varkappa\alpha}=621$; $\overline{\chi\varkappa}=620$ и т. д.

---

[1]) Буквы ϛ (фау), ϙ (коппа), ϡ (сампи) отсутствуют в нынешнем греческом алфавите. Названия остальных букв см. на стр. 54.

Такую же алфавитную нумерацию имели в древности евреи, арабы и многие другие народы Ближнего Востока. Неизвестно, у какого народа она возникла впервые.

2. **С л а в я н с к а я н у м е р а ц и я.** Южные и восточные славянские народы для записи чисел пользовались алфавитной нумерацией. У одних славянских народов числовые значения букв установились в порядке славянского алфавита, у других же (в том числе у русских) роль цифр играли не все буквы, а только те, которые имеются в греческом алфавите. Над буквой, обозначавшей цифру, ставился специальный значок («титло»), изображенный в приводимой здесь таблице. При этом числовые значения букв возрастали в том же порядке, в каком следовали буквы в греческом алфавите (порядок букв славянского алфавита был несколько иной).

В России славянская нумерация сохранилась до конца 17 века. При Петре I возобладала так называемая «арабская нумерация» (см. ниже, п. 6), которой мы пользуемся и сейчас. Славянская нумерация сохранялась только в богослужебных книгах.

Приводим славянские цифры.

А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І҃	К҃	Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	О҃	П҃	Ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р҃	С҃	Т҃	Ѵ҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѡ҃	Ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

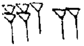
3. Древнеармянская и древнегрузинская нумерация. Армяне и грузины пользовались алфавитным принципом нумерации. Но в древнеармянском и древнегрузинском алфавитах было гораздо больше букв, чем в древнегреческом Это позволило ввести особые обозначения для чисел 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000. Числовые значения букв следовали порядку букв в армянском и грузинском алфавитах.

Алфавитная нумерация преобладала до 18 века, хотя «арабская нумерация» употреблялась в отдельных случаях гораздо раньше (в грузинской литературе такие случаи восходят к 10—11 веку; в памятниках армянской математической литературы они установлены пока только для 15 века). В Армении алфавитная нумерация употребляется и сейчас для обозначения глав в книгах, строф в стихотворениях и т. п. В Грузии алфавитная нумерация вышла из употребления.

4. Вавилонская поместная нумерация. В древнем Вавилоне примерно за 40 веков до нашего времени создалась *поместная* (позиционная) *нумерация*, т. е. такой способ изображения чисел, при котором одна и та же цифра может обозначать разные числа, смотря по месту, занимаемому этой цифрой. Наша теперешняя нумерация — тоже поместная: в числе 52 цифра 5 обозначает пятьдесят, т. е. $5 \cdot 10$, а в числе 576 та же цифра обозначает пятьсот, т. е. $5 \cdot 10 \cdot 10$. В вавилонской поместной нумерации ту роль, которую играет у нас число 10, играло число 60, и потому эту нумерацию называют *шестидесятеричной*. Числа, меньшие 60, обозначались с помощью двух знаков: для единицы  и для десятка  Они имели клинообразный вид, так как вавилоняне писали на глиняных дощечках палочками треугольной формы. Эти знаки повторялись нужное число раз, например,

 = 5,  = 30,  = 35,

 = 59.

Способ обозначения чисел, больших 60, показан на следующих примерах: запись  обозначала $5 \cdot 60 + 2 = 302$, *подобно тому как наша запись* 52 *обозначает* $5 \cdot 10 + 2$. Запись

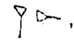
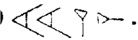
обозначала число $21 \cdot 60 + 35 = 1295$. Следующая запись:

обозначала $1 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 5 = 3725$, подобно тому как у нас запись 125 означает $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$. При отсутствии промежуточного разряда употреблялся знак , игравший роль нуля. Так, запись

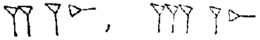
обозначала $2 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 3 = 7203$. Но отсутствие низшего разряда не обозначалось; например, число $180 = 3 \cdot 60$ изображалось записью , т. е. так же, как число 3. Та же запись  могла обозначать и число $10\,800 = 3 \cdot 60 \cdot 60$ и т. д. Различать друг от друга числа 3, 180, 10 800 и т. д. можно было только по смыслу текста.

Запись  могла также означать $\frac{3}{60}$, $\frac{3}{60 \cdot 60} = \frac{3}{3600}$, $\frac{3}{60 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{3}{216000}$ и т. д., подобно тому как числа $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10 \cdot 10} = \frac{3}{100}$, $\frac{3}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{3}{1000}$ и т. д. мы обозначаем в системе десятичных дробей с помощью цифры 3. Но мы отличаем эти дроби друг от друга, проставляя нули перед цифрой 3, и пишем $\frac{3}{10} = 0{,}3$; $\frac{3}{100} = 0{,}03$; $\frac{3}{1000} = 0{,}003$ и т. д. В вавилонской же нумерации эти нули не обозначались.

Наряду с шестидесятеричной системой нумерации вавилоняне пользовались и десятичной системой, но она не была поместной. В ней, кроме знаков для 1 и 10, существовали следующие знаки:

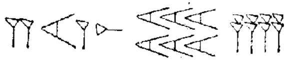
для 100 , для 1000  и 10 000 .

Числа 200, 300 и т. д. записывались знаками



и т. д. Таким же способом записывались числа 2000, 3000 и т. д., 20 000, 30 000 и т. д. Число 274 записывалось так:

число 2068 писалось так:



и т. д.

Шестидесятеричная система возникла позднее десятичной, ибо числа до 60 записываются в ней по десятичному принципу. Но до сих пор неизвестно, когда и как возникла у вавилонян шестидесятеричная система. На этот счет строилось много гипотез, но ни одна пока не доказана.

Шестидесятеричная запись *целых чисел* не получила распространения за пределами ассиро-вавилонского царства, но *шестидесятеричные дроби* проникли далеко за эти пределы: в страны Ближнего Востока, Средней Азии, в Северную Африку и Западную Европу. Они широко применялись, особенно в астрономии, вплоть до изобретения десятичных дробей, т. е. до начала 17 века. Следы шестидесятеричных дробей сохраняются и поныне в делении углового и дугового градуса (а также часа) на 60 минут и минуты на 60 секунд.

5. Римские цифры. Древние римляне пользовались нумерацией, которая сохраняется до настоящего времени под именем «римской нумерации». Мы пользуемся ею для обозначения юбилейных дат, для наименования съездов и конференций [например: XXII съезд КПСС], для нумерации некоторых страниц книги (например, страниц предисловия), глав в книгах, строф в стихотворениях и т. д.

В позднейшем своем виде римские цифры выглядят так:

$$\mathrm{I}=1;\quad \mathrm{V}=5;\quad \mathrm{X}=10;$$
$$\mathrm{L}=50;\quad \mathrm{C}=100;\quad \mathrm{D}=500;\quad \mathrm{M}=1000.$$

Прежде они имели несколько иную форму. Так, число 1000 изображалось знаком ↀ (CIƆ), а 500 — знаком IƆ.

О происхождении римских цифр достоверных сведений нет. Цифра V могла первоначально служить изображением кисти руки, а цифра X могла составиться из двух пятерок. Точно так же знак для 1000 мог составиться из удвоения знака для 500 (или наоборот).

В римской нумерации явственно сказываются следы пятеричной системы счисления. В языке же римлян (латинском) никаких следов пятеричной системы нет. Значит, эти цифры были заимствованы римлянами у другого народа (весьма вероятно — у этрусков).

Все целые числа (до 5000) записываются с помощью повторения вышеприведенных цифр. При этом, если бо̀льшая цифра стоит перед меньшей, то они складываются, если же меньшая стоит перед большей (в этом случае она не может повторяться), то меньшая вычитается из большей [1]). Например, VI = 6, т. е. 5 + 1, IV = 4, т. е. 5 — 1, XL = 40, т. е. 50 — 10, LX = 60, т. е. 50 + 10. Подряд одна и та же цифра ставится не более трех раз: LXX = 70; LXXX = 80; число 90 записывается XC (а не LXXXX).

Первые 12 чисел записываются в римских цифрах так:

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X XI, XII.

П р и м е р ы: XXVIII = 28; XXXIX = 39,

CCCXCVII = 397; MDCCCXVIII = 1818.

Выполнение арифметических действий над многозначными числами в этой записи очень трудно. Тем не менее римская нумерация преобладала в Италии до 13 века, а в других странах Западной Европы — до 16 века.

6. И н д и й с к а я п о м е с т н а я н у м е р а ц и я. В различных областях Индии существовали разнообразные системы нумерации. Одна из них распространилась по всему миру и в настоящее время является общепринятой. В ней цифры имели вид начальных букв соответствующих числительных на древнеиндийском языке — санскрите (алфавит «деванагари»).

---

[1]) В наименованиях двух числительных 18 и 19 латинский язык сохранил этот «принцип вычитания» (см, II, 4).

Первоначально этими знаками представлялись числа 1, 2, 3, ..., 9, 10, 20, 30, ..., 90, 100, 1000; с их помощью записывались другие числа. Впоследствии был введен особый знак (жирная точка, кружок) для указания пустующего разряда: знаки для чисел, бо́льших 9, вышли из употребления, и нумерация «деванагари» превратилась в десятичную поместную систему. Как и когда совершился этот переход — до сих пор неизвестно. К середине 8 века позиционная система нумерации получает в Индии широкое применение. Примерно в это время она проникает и в другие страны (Индокитай, Китай, Тибет, на территорию наших среднеазиатских республик, в Иран и др.). Решающую роль в распространении индийской нумерации в арабских странах сыграло руководство, составленное в начале 9 века Муха́ммедом из Хорезма (ныне Хорезмская область Узбекской ССР)[1]). Оно было переведено в Западной Европе на латинский язык в 12 веке. В 13 веке индийская нумерация получает преобладание в Италии. В других странах Западной Европы она утверждается в 16 веке. Европейцы, заимствовавшие индийскую нумерацию от арабов, называли ее «арабской». Это исторически неправильное название удерживается и поныне.

Из арабского языка заимствовано и слово «цифра» (по-арабски «сыфр»), означающее буквально «пустое место» (перевод санскритского слова «сунья», имеющего тот же смысл).

Это слово первоначально употреблялось для наименования знака пустующего разряда и этот смысл сохраняло еще в 18 веке, хотя уже в 15 веке появился латинский термин «нуль» (nullum — ничто).

Форма индийских цифр претерпевала многообразные изменения. Та форма, в которой мы их пишем, установилась в 16 веке.

§ 8. Наименования больших чисел

Для удобства чтения и запоминания больших чисел цифры их разбивают на так называемые «классы»: справа отделяют три цифры (первый класс), затем еще три (вто-

---

[1]) Этот замечательный ученый является также основоположником алгебры (см. III, 2). Свои работы Мухаммед писал на арабском языке, который был на Востоке международным научным языком, каким в Западной Европе был латинский язык. Отсюда — арабизированное имя аль-Хваризми (или аль-Хорезми, то есть Хорезмиец), под которым Мухаммед известен в истории.

рой класс) и т. д. Последний класс может иметь три, две или одну цифру. Между классами обычно оставляется небольшой пробел. Например, число 35461298 записывают так: 35 461 298. Здесь 298 — первый класс, 461 — второй, 35 — третий. Каждая из цифр класса называется его разрядом; счет разрядов также идет справа. Например, в первом классе 298 цифра 8 составляет первый разряд, 9 — второй, 2 — третий. В последнем классе может быть три, два разряда (в нашем примере: 5 — первый разряд, 3 — второй) или один.

Первый класс дает число единиц, второй — тысяч, третий — миллионов; сообразно с этим число 35 461 298 читается: тридцать пять *миллионов* четыреста шестьдесят одна *тысяча* двести девяносто восемь. Поэтому говорят, что единица второго класса есть тысяча; единица третьего класса — миллион.

Единица четвертого класса называется *миллиардом*, или, иначе, *биллионом* (1 миллиард = 1000 миллионов).

Единица пятого класса называется *триллионом* (1 триллион = 1000 биллионов или 1000 миллиардов). Единицы шестого, седьмого, восьмого и т. д. классов (каждая в 1000 раз больше предшествующей) называются *квадриллионом*, *квинтиллионом*, *секстиллионом*, *септиллионом* и т. д.

Пример. 12 021 306 200 000 читается: двенадцать триллионов двадцать один миллиард триста шесть миллионов двести тысяч.

§ 9. Арифметические действия

1. Сложение. Понятие о том, что́ такое сложение, возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально [1]).

Запись сложения: $8+3=11$, 8 и 3 — *слагаемые*; 11 — *сумма*.

2. Вычитание *есть нахождение одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому.* Данная сумма получает название *уменьшаемого*, данное слагаемое — ***вычитаемого***, искомое слагаемое — *разности*.

---

[1]) Часто даются «определения» вроде таких: «сложение есть действие, посредством которого несколько чисел соединяются в одно», или «действие, посредством которого находится, сколько единиц содержится в нескольких числах вместе». Но тот, кто не знал бы, что значит «сложить», не знал бы и что такое «соединить числа», так что все подобные «определения» сводятся лишь к замене одних слов другими.

З а п и с ь: $15-7=8$; 15 — уменьшаемое, 7 — вычитаемое; 8 — разность. Разность 8, сложенная с вычитаемым 7 даст уменьшаемое 15. Сложение $8+7=15$ является проверкой вычитания $15-7=8$.

3. Умножение. *Умножить некоторое число (множимое) на целое число (множитель) — значит повторить множимое слагаемым столько раз, сколько указывает множитель*[1]). Результат называется *произведением.*

З а п и с ь: $12\times 5=60$, или $12\cdot 5=60$; 12 — множимое; 5 — множитель; 60 — произведение. $12\times 5=12+12+12+$ $+12+12$.

Если множимое и множитель меняются ролями, произведение остается тем же.

Например, $2\times 5=2+2+2+2+2=10$ и $5\times 2=$ $=5+5=10$ Поэтому и множитель и множимое называются «сомножителями».

4. Деление есть *нахождение одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю.* Данное произведение получает название *делимого,* данный сомножитель — *делителя,* искомый сомножитель — *частного.*

З а п и с ь: $48:6=8$; 48 — делимое, 6 — делитель, 8 — частное. Произведение делителя 6 и частного 8 дает делимое 48 (проверка деления). Пишут также $\frac{48}{6}=8$(см. II, 22).

Частное от деления одного целого числа на другое целое *может не быть целым числом;* тогда это частное можно представить дробью (II, 16). Если частное есть целое число, то говорят, что первое из упомянутых чисел *нацело делится* или, короче, *делится* на второе. Например, 35 делится (нацело) на 5, ибо частное есть целое число 7.

Второе число в этом случае называется *делителем* первого, первое же — *кратным* второго.

П р и м е р 1. 5 есть делитель чисел 25, 60, 80 и не является делителем чисел 4, 13, 42, 61.

П р и м е р 2. 60 есть кратное чисел 15, 20, 30 и не является кратным чисел 17, 40, 90.

Во многих случаях можно, не выполняя деления, узнать, делится ли нацело одно целое число на другое. Об этом см. II, 11.

В случае, когда делимое не делится нацело на делитель, иногда выполняют так называемое *деление с остатком.*

---

[1]) Об умножении на дробное число см. II, 20.

Деление с остатком есть отыскание наибольшего целого числа, которое в произведении с делителем дает число, не превышающее делимое. Искомое число называется *неполным частным.* Разность между делимым и произведением делителя на неполное частное называется *остатком;* он всегда меньше делителя.

Пример. 19 не делится нацело на 5. Числа 1, 2, 3 в произведении с 5 дают 5, 10, 15, не превосходящие делимое 19, но уже 4 дает в произведении с 5 число 20, большее, чем 19. Поэтому неполное частное есть 3. Разность между 19 и произведением $3 \cdot 5 = 15$ есть $19 - 15 = 4$; поэтому остаток есть 4.

О делении на нуль см. II, 23.

5. Возведение в степень. *Возвести число в целую (вторую, третью, четвертую и т. д.) степень — значит повторить его сомножителем два, три, четыре и т. д. раз*[1]. Число, повторяющееся сомножителем, называется *основанием степени;* число, указывающее, сколько раз берется одинаковый множитель, называется *показателем степени.* Результат называется *степенью.*

Запись: $3^4 = 81$; здесь 3 — основание степени, 4 — показатель степени, 81 — степень; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Вторая степень называется иначе *квадратом,* третья степень — *кубом.* Первой степенью числа называют само это число.

6. Извлечение корня. Извлечение корня есть нахождение основания степени по степени и ее показателю. Данная степень получает название *подкоренного числа,* данный показатель — *показателя корня,* искомое основание степени называется *корнем.*

Запись: $\sqrt[4]{81} = 3$. Здесь 81 — подкоренное число, 4 — показатель корня, 3 — корень. Возведение числа 3 в четвертую степень дает 81; $3^4 = 81$ (проверка извлечения корня).

Корень второй степени называется иначе *квадратным;* корень третьей степени — *кубичным.* При знаке квадратного корня показатель корня принято опускать: $\sqrt{16} = 4$ означает $\sqrt[2]{16} = 4$.

Сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня попарно являются *обратными действиями.*

---

[1]) О возведении в отрицательную, нулевую и дробную степени см. III, 61.

Правила первых четырех действий с целыми числами предполагаются известными. Возведение в степень выполняется повторным умножением. Об извлечении корней см. II, 44 и 44а.

§ 10. Порядок действий; скобки

Если несколько действий выполняются одно за другим, то результат, вообще говоря, зависит от порядка действий. Например, $4-2+1=3$, если производить действия в порядке их записи; если же сначала сложить 2 и 1 и вычесть полученную сумму из 4, то получим 1. Чтобы указать, в каком порядке нужно выполнять действия (в тех случаях, когда результат зависит от порядка действий), пользуются *скобками*. Действия, заключенные в скобки, выполняются раньше других. В нашем случае $(4-2)+1=3$; $4-(2+1)=1$.

Пример 1.

$$(2+4)\times 5=6\times 5=30;\quad 2+(4\times 5)=2+20=22.$$

Чтобы не загромождать чрезмерно записи, *условились не писать скобок*: 1) ***в том случае, когда действия сложения и вычитания, следуя друг за другом, должны выполняться в том порядке, в каком они записаны;*** например, вместо $(4-2)+1=3$ пишут $4-2+1=3$; 2) ***в том случае, когда внутри скобок производятся действия умножения или деления;*** например, вместо $2+(4\times 5)=22$ пишут $2+4\times 5=22$.

При вычислении таких выражений, которые либо совсем не содержат скобок, либо содержат лишь такие скобки, внутри которых больше нет скобок, нужно производить действия в таком порядке: 1) сначала выполняются действия, заключенные в скобки; при этом умножение и деление делаются в порядке их следования, но раньше, чем сложение и вычитание; 2) затем выполняются остающиеся действия, причем опять умножение и деление делаются в порядке их следования, но раньше сложения и вычитания.

Пример 2. $2\cdot 5-3\cdot 3$. Сначала выполняем умножения $2\cdot 5=10$; $3\cdot 3=9$, затем вычитание: $10-9=1$.

Пример 3.

$$9+16:4-2\cdot(16-2\cdot 7+4)+6\cdot(2+5).$$

Сначала выполняем действия в скобках:

$$16-2\cdot 7+4=16-14+4=6;\quad 2+5=7.$$

Теперь выполняем остающиеся действия: $9+16:4-2\cdot 6+6\cdot 7=9+4-12+42=43$.

Часто для указания порядка действий необходимо заключать в скобки такие выражения, которые сами уже содержат скобки. Тогда, кроме обычных (*круглых*), применяют скобки иной формы, например *квадратные* [ ]. *Если в скобки нужно заключить выражение, содержащее уже круглые и квадратные скобки, пользуются фигурными* скобками { }. Вычисление подобных выражений производится в следующем порядке: сначала производятся вычисления внутри всех круглых скобок в вышеуказанной последовательности; затем — вычисления внутри всех квадратных скобок по тем же правилам; далее — вычисления внутри фигурных скобок и т. д.; наконец, выполняются остающиеся действия.

Пример 4. $5+2\times[14-3\cdot(8-6)]+32:(10-2\cdot 3)$. Выполняем действия в круглых скобках; имеем:

$$8-6=2;\quad 10-2\cdot 3=10-6=4;$$

действия в квадратных скобках дают: $14-3\cdot 2=8$; выполняя остающиеся действия, находим:

$$5+2\cdot 8+32:4=5+16+8=29.$$

Пример 5. $\{100-[35-(30-20)]\}\cdot 2$. Порядок действий: $30-20=10$; $35-10=25$; $100-25=75$; $75\cdot 2=150$.

§ 11. Признаки делимости

Признак делимости на 2. Число, делящееся на 2, называется *четным*, не делящееся — *нечетным. Число делится на два, если его последняя цифра четная или нуль.* В остальных случаях — не делится.

Например, число 52 738 делится на 2, так как последняя цифра 8 — четная; 7691 не делится на 2, так как 1 — цифра нечетная; 1250 делится на 2, так как последняя цифра нуль.

Признак делимости на 4. *Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на* 4. В остальных случаях — не делится.

Примеры. 31 700 делится на 4, так как оканчивается двумя нулями; 215 634 не делится на 4, так как последние две цифры дают число 34, не делящееся на 4; 16 608 делится на 4, так как две последние цифры 08 дают число 8, делящееся на 4.

Признак делимости на 8 подобен предыдущему. *Число делится на* 8, *если три последние цифры его нули или образуют число, делящееся на* 8. В остальных случаях — не делится.

Примеры. 125 000 делится на 8 (три нуля в конце); 170 004 не делится на 8 (три последние цифры дают число 4, не делящееся на 8); 111 120 делится на 8 (три последние цифры дают число 120, делящееся на 8).

Можно указать подобные признаки и для деления на 16, 32, 64 и т. д., но они не имеют практического значения.

Признаки делимости на 3 и на 9. *На* 3 *делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на* 3; *на* 9 — *только те, у которых сумма цифр делится на* 9.

Примеры. Число 17 835 делится на 3 и не делится на 9, так как сумма его цифр $1+7+8+3+5=24$ делится на 3 и не делится на 9. Число 106 499 не делится ни на 3, ни на 9, так как сумма его цифр (29) не делится ни на 3, ни на 9. Число 52 632 делится на 9, так как сумма его цифр (18) делится на 9.

Признак делимости на 6. *Число делится на* 6, *если оно делится одновременно на* 2 *и на* 3. В противном случае — не делится.

Например, 126 делится на 6, так как оно делится и на 2 и на 3.

Признак делимости на 5. *На* 5 *делятся числа, последняя цифра которых* 0 *или* 5. Другие — не делятся.

Пример. 240 делится на 5 (последняя цифра 0); 554 не делится на 5 (последняя цифра 4).

Признак делимости на 25. *На* 25 *делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на* 25 (т. е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие не делятся.

Пример. 7150 делится на 25 (оканчивается на 50). 4855 не делится на 25.

Признаки делимости на 10, 100 и 1000. *На* 10 *делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на* 100 — *только те числа, у которых две последние цифры нули, на* 1000 — *только те, у которых три последние цифры нули.*

Примеры. 8200 делится на 10 и на 100; 542 000 делится на 10, 100, 1000.

Признак делимости на 11. *На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на* 11.

Примеры. Число 103 785 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, $1+3+8=12$ равна сумме цифр, занимающих четные места $0+7+5=12$. Число 9 163 627 делится на 11, так как сумма цифр, занимающих нечетные места, есть $9+6+6+7=28$, а сумма цифр, занимающих четные места, есть $1+3+2=6$; разность между числами 28 и 6 есть 22, а это число делится на 11. Число 461 025 не делится на 11, так как числа $4+1+2=7$ и $6+0+5=11$ не равны друг другу, а их разность $11-7=4$ на 11 не делится.

Существуют признаки делимости и на другие числа (сверх вышеперечисленных); но эти признаки сложнее.

§ 12. Простые и составные числа

Все целые числа, кроме 1, имеют по меньшей мере двух делителей: единицу и самого себя. Те из них, которые не имеют никаких других делителей, называются *простыми* (или первоначальными). Например, 7, 41, 53 — простые числа. Те числа, которые имеют еще и другие делители, называются *составными* (или сложными). Например, 21 — составное число (его делители 1, 3, 7, 21), 81 — составное число (его делители 1, 3, 9, 27, 81). Число 1 можно было бы отнести к простым числам; однако предпочтительно выделять его особо, не относя ни к простым, ни к составным [1]).

Простых чисел — бесчисленное множество.

Простые числа, не превосходящие 200, следующие [2]):

$$\left.\begin{matrix}2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,\\ 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101,\\ 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151,\\ 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.\end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

---

[1]) Это соглашение обусловлено тем, что для единицы не имеют силы многие правила, справедливые для всех остальных простых чисел.

[2]) На стр. 50—51 приведена таблица простых чисел, не превосходящих 6000.

§ 13. Разложение на простые множители

Всякое составное число можно единственным способом представить в виде произведения простых множителей. Например, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$; $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ (или $3^2 \cdot 5^1$); $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ (или $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$). Для небольших чисел разложение легко делается по догадке. Для больших чисел можно пользоваться таким приемом.

Пример 1. Пусть дано число 1421. Берем подряд простые числа таблицы (А) на стр. 73 и останавливаемся на том, которое является делителем данного числа. На основании признаков делимости видим, что числа 2, 3, 5 не могут быть делителями числа 1421; попытавшись разделить на 7, видим, что 1421 делится на 7 и дает в частном 203. Слева от черты записываем число 1421; справа против него — делитель; под числом — частное 203. Таким же образом испытываем число 203. Чисел 2, 3, 5, оказавшихся негодными при первой пробе, мы не трогаем и начинаем испытание с числа 7. Оказывается, что 7 есть делитель числа 203. Записываем его справа от черты против 203. Снизу под 203 пишем частное 29. Число 29 — простое, поэтому разложение закончено. Результат его:

Запись:

1421	7
203	7
29	29

$$1421 = 7 \cdot 7 \cdot 29 = 7^2 \cdot 29.$$

Этот общий способ можно в ряде случаев упрощать.

Пример 2. Разложим на простые множители число 1 237 600. Заметив, что $1\,237\,600 = 12\,376 \times 100$, разложим по отдельности два сомножителя. Второй разлагается сразу: $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$. Первый разлагаем следующим образом.

Запись:

12 376	2
6 188	2
3 094	2
1 547	7
221	13
17	17

Берем из таблицы (А) первое простое число 2; что оно есть делитель числа 12 376, видно по признаку делимости. Найдя частное 6188, снова берем из таблицы (А) число 2. Второе частное 3094 также четно; делим его опять на 2. Результат 1547 уже не делится на 2. Признаки делимости покажут, что оно не делится ни на 3, ни на 5. Пробуем делить 1547 на 7; получаем частное 221. Пробуем еще раз разделить на 7. Не делится. Тогда испытываем следующие простые числа. На 11 число 221 не делится, но на 13 делится, в частном — простое число 17.

Результат: $1\,237\,600 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17.$

§ 14. Общий наибольший делитель

Общим делителем нескольких чисел называется число, служащее делителем (II, 9, п. 4) для каждого из них. Например, числа 12, 18, 30 имеют общий делитель 3; число 2 — тоже их общий делитель. Среди всех общих делителей всегда имеется наибольший, в нашем примере — число 6. Это число называется *общим наибольшим делителем* (О. н. д.).

Примеры. Для чисел 16, 20, 28 О. н. д. есть 4; для чисел 5, 30, 60, 90 О. н. д. есть 5.

Когда числа небольшие, их О. н. д. легко находится по догадке. Если мы имеем дело с большими числами, разлагаем каждое на простые множители (см. II, 13) и выписываем те из них, которые входят во все данные числа. Каждый из таких множителей берем с наименьшим показателем, с которым он входит в данные числа. Производим умножение.

Пример 1. Найти О. н. д. чисел 252, 441, 1080. Разлагаем на простые множители

$$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7;\ 441 = 3^2 \cdot 7^2;\ 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Общим для чисел является только простой множитель 3; наименьший из показателей, с которыми он входит в данные числа, есть 2. О. н. д. равен $3^2 = 9$.

Пример 2. Найти О. н. д. чисел 234, 1080, 8100.

$$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13;\ 1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5;\ 8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2.$$

$$\text{О. н. д.} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

Может случиться, что простых множителей, общих для всех данных чисел, не будет вовсе. Тогда общий наибольший делитель есть 1. Например, для чисел $15 = 3 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$, $6 = 2 \cdot 3$ О. н. д. $= 1$. Два числа, О. н. д. которых равен 1, называются ***взаимно простыми.*** Например, 15 и 22 — взаимно простые числа.

§ 15. Общее наименьшее кратное

Общим кратным нескольких чисел называется число, служащее кратным (II, 9, п. 4) для каждого из них. Например, числа 15, 6, 10 имеют общее кратное 180; число 90 — также общее кратное этих чисел. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее, в данном случае число 30. Это число называется *общим наименьшим кратным*

(О. н. к.). Для небольших чисел О. н. к. находится легко по догадке. Если числа большие, поступаем так: разлагаем данные числа на простые множители; выписываем все простые множители, входящие хотя бы в одно из данных чисел; каждый из взятых множителей возводим в наибольшую из тех степеней, с которыми он входит в данные числа. Производим умножение.

Пример 1. Найти О. н. к. чисел 252, 441, 1080.

Разлагаем на простые множители: $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $441 = 3^2 \cdot 7^2$; $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Перемножаем $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 5$. О. н. к. $= 52\,920$.

Пример 2. Найти О. н. к. чисел 234, 1080, 8100 (см. пример 2 § 14). О. н. к. $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13 = 210\,600$.

§ 16. Простые дроби

Простой дробью (короче, *дробью*) *называется часть единицы или несколько равных частей* (*долей*) *единицы.* Число, показывающее, на сколько долей разделена единица, называется *знаменателем* дроби; число, показывающее количество взятых долей, — *числителем* дроби.

Запись: $\frac{3}{5}$ или $^3/_5$ (три пятых), здесь 3 — числитель, 5 — знаменатель.

Если числитель меньше знаменателя, то дробь меньше единицы и называется *правильной*: $\frac{3}{5}$ — правильная дробь. Если числитель равен знаменателю, дробь равна единице. Если числитель больше знаменателя, дробь больше единицы. В обоих последних случаях дробь называется *неправильной.* Например, $\frac{5}{5}$, $\frac{17}{5}$ — неправильные дроби. Чтобы выделить наибольшее целое число, содержащееся в неправильной дроби, нужно разделить числитель на знаменатель. Если деление выполняется без остатка, то взятая неправильная дробь равна частному. Например, $\frac{45}{5} = 45:5 = 9$. Если деление выполняется с остатком, то (неполное) частное дает искомое целое число, остаток же становится числителем дробной части; знаменатель дробной части остается прежним.

Пример. Дана дробь $\frac{48}{5}$. Делим 48 на 5. Получаем частное 9 и остаток 3; $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

Число, содержащее целую и дробную части (например, $9\frac{3}{5}$), называется *смешанным*. Дробная часть смешанного числа может быть и неправильной дробью, например $7\frac{13}{5}$; тогда можно из дробной части выделить наибольшее целое число (см. выше) и представить смешанное число в таком виде, чтобы дробная часть стала правильной дробью (или вовсе исчезла). Например, $7\frac{13}{5}=7+\frac{13}{5}=7+2\frac{3}{5}=9\frac{3}{5}$. К подобному виду обычно и приводят смешанные числа.

Часто приходится (например, при умножении дробей) решать вопрос обратного характера: дается смешанное число, требуется представить его в виде дроби (неправильной). Для этого нужно: 1) целое число, входящее в смешанное, помножить на знаменатель дробной части; 2) к произведению прибавить числитель. Полученное число будет числителем искомой дроби, знаменатель остается прежний.

Пример. Дано смешанное число $9\frac{3}{5}$. 1) $9\cdot 5=45$; 2) $45+3=48$; 3) $9\frac{3}{5}=\frac{48}{5}$.

§ 17. Сокращение и «расширение» дроби

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число. Например,

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{18}{30};\quad \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6};\quad \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}.$$

Такое преобразование дроби[1]) мы назовем *«расширением» дроби*. Будем говорить, что дробь $\frac{18}{30}$ получена «расширением на 6» из дроби $\frac{3}{5}$.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число. Например, $\frac{18}{30}=\frac{18:6}{30:6}=\frac{3}{5}$; $\frac{4}{8}=\frac{4:4}{8:4}=\frac{1}{2}$. Такое преобразование дроби

[1]) *Это преобразование приходится совершать постоянно* (например, при сложении дробей); оно не менее важно, чем сокращение дроби. Так как в наших учебниках для него не вводится никакого названия, то в первом издании справочника автор предложил назвать это преобразование «удлинением». Необходимость введения нового термина не встретила возражений. Но самый термин «удлинение» многие лица считали неудачным, предпочитая ему термин «расширение».

называется *сокращением дроби.* Говорят, что дробь $\frac{3}{5}$ получена «сокращением на 6» из дроби $\frac{18}{30}$.

Дробь можно сократить лишь в том случае, если числитель и знаменатель имеют одинаковые делители (т. е. если они не взаимно простые). Сокращение можно производить или постепенно или сразу на О. н. д.

Пример. Сократить дробь $\frac{108}{144}$. Применяя признак делимости на 4 (см. выше § 11), видим, что 4 есть общий делитель числителя и знаменателя. Сокращая на 4, имеем: $\frac{108}{144}=\frac{108:4}{144:4}=\frac{27}{36}$. Замечая, что 27 и 36 имеют общим делителем 9, сокращаем $\frac{27}{36}$ на 9; имеем: $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$. Дальнейшее сокращение невозможно (3 и 4 — взаимно простые числа).

Тот же результат мы получим, если найдем О. н. д. чисел 108 и 144. Он равен 36. Сократив на 36, получим:

$$\frac{108}{144}=\frac{108:36}{144:36}=\frac{3}{4}.$$

После сокращения на О. н. д. получается *несократимая дробь.*

§ 18. Сравнение дробей; приведение к общему знаменателю

Из двух дробей с одинаковым числителем та дробь больше, у которой знаменатель меньше. Например, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}>\frac{5}{9}$. Из двух дробей с одинаковым знаменателем та дробь больше, у которой числитель больше. Например, $\frac{5}{8}>\frac{3}{8}$.

Чтобы сравнить две дроби, у которых различны и числитель и знаменатель, нужно одну или обе дроби преобразовать так, чтобы их знаменатели стали одинаковыми. Для этого можно, например, первую дробь расширить на знаменатель второй, а вторую — на знаменатель первой.

Пример. Сравним дроби $\frac{3}{8}$ и $\frac{7}{12}$. Расширяем первую дробь на 12, а вторую на 8; имеем: $\frac{3}{8}=\frac{36}{96}$; $\frac{7}{12}=\frac{56}{96}$. Теперь знаменатели одинаковы. Сравнив числители, видим, что вторая дробь больше первой.

Примененное преобразование дробей называется *приведением их к общему знаменателю.*

Чтобы привести к общему знаменателю несколько дробей, можно каждую из них расширить на произведение знаменателей остальных. Например, чтобы привести к общему знаменателю дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$, расширим первую на $5 \cdot 6 = 30$, вторую на $8 \cdot 5 = 40$; третью на $8 \cdot 6 = 48$. Получим $\frac{3}{8} = \frac{90}{240}$; $\frac{5}{6} = \frac{200}{240}$; $\frac{2}{5} = \frac{96}{240}$. Общим знаменателем будет произведение знаменателей всех данных дробей $(8 \cdot 6 \cdot 5 = 240)$.

Этот способ приведения к общему знаменателю — самый простой и во многих случаях самый практичный. Единственное его неудобство состоит в том, что общий знаменатель может оказаться довольно большим, тогда как можно выбрать его меньшим. Именно, за общий знаменатель можно взять любое общее кратное (в частности, О. н. к.) данных знаменателей. Тогда нужно расширить каждую дробь на частное, получаемое от деления общего кратного на знаменатель взятой дроби (это частное называется *дополнительным множителем*).

Пример. Даны дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$. О. н. к. знаменателей 8, 6, 5 есть 120. Дополнительные множители: $120:8 = 15$; $120:6 = 20$; $120:5 = 24$. Расширяем первую дробь на 15, вторую на 20, третью на 24. Получаем:

$$\frac{3}{8} = \frac{45}{120}; \quad \frac{5}{6} = \frac{100}{120}; \quad \frac{2}{5} = \frac{48}{120}.$$

В учебниках арифметики часто излагается только этот прием приведения к общему знаменателю. На практике он оправдывается, однако, лишь в том случае, если О. н. к. находится легко по догадке. В противном случае приходится затрачивать много времени на отыскание О. н. к. и дополнительных множителей. Сверх того, часто оказывается, что О. н. к. не намного меньше произведения знаменателей или даже вовсе не меньше его, и тогда затраченное время и труд совершенно бесполезны.

§ 19. Сложение и вычитание дробей

Если знаменатели дробей одинаковы, то, чтобы сложить дроби, нужно сложить их числители, а чтобы вычесть дроби, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого; полученная сумма или разность будет числителем результата; знаменатель остается прежним. Если знаменатели дробей различны, нужно предварительно привести дроби к общему знаменателю.

Пример 1. $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$.

Пример 2. $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{45}{120}+\frac{100}{120}-\frac{48}{120}=\frac{97}{120}$.

Если складываются смешанные числа, то отдельно находят сумму целых и сумму дробных частей.

Пример 3.

$$7\frac{3}{4}+4\frac{5}{6}=(7+4)+\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)=11\frac{19}{12}=12\frac{7}{12}.$$

При вычитании смешанных чисел дробная часть вычитаемого может оказаться больше дробной части уменьшаемого. Тогда в уменьшаемом «занимается» единица и обращается в неправильную дробь.

Пример 4.

$$7\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}=7\frac{3}{12}-4\frac{4}{12}=6\frac{15}{12}-4\frac{4}{12}=2\frac{11}{12}.$$

Пример 5. $11-10\frac{5}{7}=10\frac{7}{7}-10\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$.

§ 20. Умножение дробей. Определение

Для умножения и деления дроби на *целое* число можно сохранить данные выше определения (II, 9, пп. 3 и 4). Например,

$$2\frac{3}{4}\times 3=2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}=8\frac{1}{4}.$$

Обратно, $8\frac{1}{4}:3=2\frac{3}{4}$. Практические правила вычисления см. ниже.

Для умножения на *дробное* число определение § 9 сохранить нельзя. Например, действие $2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ нельзя выполнить, если его понимать так, что $2\frac{1}{2}$ требуется взять слагаемым $\frac{3}{4}$ раза.

Умножить некоторое число (целое или дробное) *на дробь — значит разделить это число на знаменатель дроби и результат помножить на числитель.*

Пример. $800 \cdot \frac{3}{4}$; $800:4=200$; $200 \cdot 3=600$, так что $800 \cdot \frac{3}{4}=600$. Порядок действий (деления и умножения) можно изменить; результат будет тот же: $800 \cdot 3=2400$, $2400:4=600$.

Приведенное определение не является произвольным измышлением: оно вытекает из необходимости полностью сохранить за действием умножения ту роль, которую оно играло в практике и в теории, пока мы имели дело с целыми числами. Убедимся в этом на двух примерах.

Пример. Литр керосина весит 800 *г*. Сколько весят 4 *л*? Решение: $800 \cdot 4=3200$ (*г*) $=3$ *кг* 200 *г*. Результат найден умножением на 4.

Сколько весят $^3/_4$ *л* керосина? Решение: $800 \cdot \frac{3}{4}=$ $=600$ (*г*) (см. предыдущий пример).

Если мы умножению на дробь дадим определение, отличающееся от вышеприведенного, мы получим неправильный ответ. Если бы мы, исходя из определения § 9, признали умножение на $\frac{3}{4}$ невозможным, нам пришлось бы решать задачу о весе керосина разными действиями: при целом числе литров умножением, а при дробном числе иным действием [1]).

При перемножении целых чисел произведение не меняется от перестановки сомножителей: $3 \cdot 4=4 \cdot 3=12$. Это свойство сохраняется и при умножении на дробь. Например, $\frac{2}{3} \cdot 3=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$; этот результат получен на основе прежнего определения (см. § 9). Переставим сомножители: $3 \cdot \frac{2}{3}$; прежнее определение умножения теперь не годится, но новое дает $3 \cdot \frac{2}{3}=2$.

Вообще оказывается, что при новом определении умножения остаются в силе все прежние свойства и правила, за исключением одного: при прежнем определении умножения число увеличивалось, отсюда и название «умножение» (от слова «много»). Теперь же мы должны сказать: от умножения на число, *большее* единицы, множимое *уве-*

[1]) Возникает вопрос, нельзя ли было дать сразу такое определение, которое годилось бы и для умножения на целое число, и для умножения на дробь? Оказывается, что нельзя: при определении умножения дроби *неизбежно приходится предполагать заранее известным умножение на целое число* (см. определение этого параграфа).

личивается; от умножения на число, *меньшее* единицы (т. е. на правильную дробь), оно *уменьшается*. Несоответствие последнего факта с названием действия объясняется тем, что название «умножение» восходит к тем отдаленным временам, когда понятие умножения относили только к целым числам.

§ 21. Умножение дробей. Правило

Чтобы умножить дробь на дробь, помножают числитель на числитель и знаменатель на знаменатель. Первый результат есть числитель произведения, второй — знаменатель. Если среди сомножителей имеются смешанные числа, то их предварительно обращают в неправильную дробь. Еще до перемножения можно сокращать любой множитель числителя с любым множителем знаменателя на общий делитель.

Пример 1. $2\frac{1}{12}\cdot 1\frac{7}{20}=\frac{25}{12}\cdot\frac{27}{20}=\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{45}{16}=2\frac{13}{16}$ (сокращены: 25 и 20 на 5; 12 и 27 на 3).

Все сказанное распространяется на случай, когда число сомножителей больше двух.

Пример 2. $4\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot 4\frac{2}{3}=\frac{9\cdot 4\cdot 14}{2\cdot 7\cdot 3}=\frac{3\cdot 2\cdot 2}{1\cdot 1\cdot 1}=12$ (сокращены: 9 и 3 на 3; 4 и 2 на 2; 14 и 7 на 7).

Если среди сомножителей есть целые числа, то каждое из последних можно рассматривать как дробь со знаменателем 1.

Пример 3. $\frac{5}{8}\cdot 7\cdot\frac{4}{15}=\frac{5\cdot 7\cdot 4}{8\cdot 1\cdot 15}=\frac{1\cdot 7\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ (сокращены: 5 и 15 на 5; 4 и 8 на 4).

§ 22. Деление дробей

Определение деления, данное выше в § 9, сохраняется и для деления дробей. Из него вытекает следующее правило.

Чтобы разделить какое-нибудь число на дробь, нужно умножить это число на дробь, обратную делителю[1]).

---

[1]) *Обратная дробь* получится из данной, если у последней поменять местами числитель и знаменатель. Например, для дроби $\frac{6}{7}$ обратная дробь будет $\frac{7}{6}$.

Пример 1. $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$. Дробь, обратная $\frac{4}{15}$, есть $\frac{15}{4}$. Следовательно, $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}=\frac{2\cdot 15}{3\cdot 4}=2\frac{1}{2}$.

Пример 2. $1\frac{3}{5}:3\frac{1}{5}=\frac{8}{5}:\frac{16}{5}=\frac{8\cdot 5}{5\cdot 16}=\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$.

Это правило применимо и в том случае, когда делимое и делитель — целые числа. Например, $2:5=2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. Поэтому дробная черта равносильна знаку деления.

§ 23. Действия с нулем

Сложение. Прибавление нуля к некоторому числу оставляет последнее неизменным:

$$5+0=5;\quad 3\frac{5}{7}+0=3\frac{5}{7}.$$

Вычитание. *Вычитание нуля из какого-либо числа* оставляет последнее неизменным:

$$5-0=5;\quad 3\frac{5}{7}-0=3\frac{5}{7}.$$

Умножение. Произведение нуля на любое число равно нулю:

$$5\cdot 0=0;\quad 0\cdot 3\frac{5}{7}=0;\quad 0\cdot 0=0.$$

Деление. 1. Частное от деления нуля на какое-либо число, отличное от нуля, равно нулю:

$$0:7=0;\quad 0:\frac{3}{950}=0.$$

2. Частное от деления нуля на нуль *неопределенно.* В этом случае любое число удовлетворяет определению частного (II, 9, п. 4). Например, можно положить $0:0=5$, ибо $5\cdot 0=0$; но с равным правом $0:0=3\frac{5}{7}$, ибо $3\frac{5}{7}\cdot 0=$ $=0$. Можно сказать, что задача деления нуля на нуль имеет бесчисленное множество решений, и без указания дополнительных данных действие $0:0$ не имеет смысла. Дополнительные данные должны состоять в указании того, каким образом изменялись величины делимого и делителя до того, как они стали нулями. Если это известно, то в

большинстве случаев можно выражению 0:0 придать смысл. Так, если известно, что делимое принимало последовательно значения

$$\frac{3}{100}, \quad \frac{3}{1000}, \quad \frac{3}{10\,000} \text{ и т. д.,}$$

а делитель $\frac{7}{100}$, $\frac{7}{1000}$ и т. д., то частное в это время было $\frac{3}{100}:\frac{7}{100}=\frac{3}{7}$; $\frac{3}{1000}:\frac{7}{1000}=\frac{3}{7}$ и т. д., т. е. оставалось равным $\frac{3}{7}$, поэтому и частное 0 : 0 считается здесь равным $\frac{3}{7}$.

В подобных случаях говорят о «раскрытии неопределенности 0:0» (см. VI, 12, пример 2). Для раскрытия неопределенности 0:0 существует ряд общих приемов, изучаемых высшей математикой, но во многих случаях удается обойтись и средствами элементарной математики.

3. Частное от деления какого-либо числа, отличного от нуля, на нуль не существует, так как в этом случае никакое число не может удовлетворить определению частного (II, 9, п. 4).

Напишем, например, 7 : 0; какое бы число ни взять на пробу (скажем, 2, 3, 7),оно не годится (ибо $2\cdot 0=0$; $3\cdot 0=0$; $7\cdot 0=0$ и т. д., а нужно получить в произведении 7). Можно сказать, что задача о делении на нуль числа, отличного от нуля, не имеет решения.

Однако число, отличное от нуля, можно разделить на число, как угодно близкое к нулю, и чем ближе делитель к нулю, тем больше будет частное. Так, если будем делить 7 на $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10\,000}$ и т. д., то получим частные 70, 700, 7000, 70 000 и т. д., которые неограниченно возрастают. Поэтому часто говорят, что частное от деления 7 на 0 «бесконечно велико», или «равно бесконечности», и пишут $7:0=\infty$. Смысл этого выражения состоит в том, что если делитель приближается к нулю, а делимое остается равным 7 (или приближается к 7), то частное неограниченно увеличивается.

§ 24. Целое и часть

1. Нахождение части по целому. *Чтобы найти некоторую часть числа, помножают его на дробь, выражающую эту часть.*

Пример. По уставу кооператива, для правомочности отчетного собрания на нем должно присутствовать не менее $\frac{2}{3}$ членов организации. В кооперативе 120 членов. При каком составе может состояться отчетное собрание?

Решение: $120 \cdot \frac{2}{3} = 80$.

2. Нахождение целого по части. *Чтобы найти число по величине данной его части, делят эту величину на дробь, выражающую данную часть.*

Пример. Вес туши быка составляет $\frac{3}{5}$ живого веса. Каков должен быть живой вес быка, чтобы туша его весила 420 *кг*?

Решение: $420 : \frac{3}{5} = 700$ (*кг*).

3. Выражение части в долях целого. *Чтобы выразить часть в долях целого, часть делят на целое.*

Пример. В классе 30 учащихся, отсутствуют четверо; какая часть учащихся отсутствует?

Решение: $4 : 30 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

§ 25. Десятичные дроби

Вычисления с простыми дробями становятся очень громоздкими, если знаменатели их сколько-нибудь велики. Главное затруднение состоит в приведении дробей к общему знаменателю; оно вытекает из того, что знаменатели могут быть любыми числами, в выборе которых нет никакой системы. Поэтому уже в древности пришли к мысли выбирать не произвольно, а систематически доли единицы (которые в простых дробях играют роль знаменателей). Древнейшими *систематическими дробями* употреблявшимися в Вавилоне за 4000 лет до нашего времени и перешедшими через древнегреческих астрономов к астрономам Западной Европы, были *шестидесятеричные дроби* (см. II, 7, п. 4). В конце 16 века, когда сложные вычисления с дробями стали широко применяться во всех областях жизни, стали входить в употребление другие систематические дроби: *десятичные* (см. II, 31). В них единица делится на десять долей (десятые), каждая десятая доля снова на десять долей (сотые) и т. д. Преимущество десятичных дробей перед другими систематическими состоит в том, что они основаны на той же системе, на которой построены счет и запись целых чисел. Благодаря этому и запись и правила действий с десятичными дробями по существу те же, что и для целых чисел.

При записи десятичных дробей нет нужды обозначать наименование долей («знаменатель»); это наименование узнается по месту, занимаемому соответствующей цифрой. Сначала пишется целая часть числа, справа от нее ставится запятая; первая цифра после запятой означает число десятых (т. е. десятых долей единицы), вторая — сотых, третья — тысячных и т. д. Цифры, стоящие после запятой, называются десятичными знаками.

Пример. 7,305 — семь целых, три десятых, пять тысячных (нуль показывает отсутствие сотых долей), т. е.

$$7{,}305 = 7 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Одним из преимуществ десятичных дробей является то, что выражение дробной части сразу же прочитывается в приведенном к одному знаменателю виде:

$$7{,}305 = 7\frac{305}{1000};$$

число после запятой (305) есть числитель дробной части, знаменателем дроби является то число, которое показывает, какие доли представляет последний десятичный знак (в данном случае 1000).

Если десятичная дробь не содержит целой части, то перед запятой ставят нуль; например, $\frac{35}{100} = 0{,}35$.

§ 26. Свойства десятичных дробей

1. Десятичная дробь не изменит величины, если к ней справа приписать любое число нулей.

Пример. 12,7 = 12,70 = 12,700 и т. д. [1]).

2. Десятичная дробь не изменит величины, если отбросить нули, стоящие справа в конце ее.

Пример. 0,00830 = 0,0083. (Нули, не стоящие на конце, отбрасывать нельзя.)

3. Десятичная дробь увеличится в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести через один, два, три и т. д. знака вправо.

---

[1]) Об отличии, которое делают между записью 12,7 и 12,70, см. II, 34.

Пример. Число 13,058 увеличится в 100 раз, если напишем 1305,8.

4. Десятичная дробь уменьшится в 10, 100, 1000 и т. д. раз, если запятую перенести влево через один, два, три и т. д. знака.

Пример. 176,24 уменьшится в 10 раз, если напишем 17,624; в 1000 раз, если напишем 0,17624.

Эти свойства позволяют быстро производить умножение и деление на числа 10, 100, 1000 и т. д.

Примеры. $12{,}08 \cdot 100 = 1208$; $12{,}08 \cdot 10\,000 = 120\,800$ (предварительно напишем 12,08 в виде 12,0800, затем перенесем запятую вправо через четыре знака); $42{,}03 : 10 = 4{,}203$; $42{,}03 : 1000 = 0{,}04203$ (предварительно напишем 42,03 в виде 0042,03 и перенесем запятую на три знака влево).

§ 27. Сложение, вычитание и умножение десятичных дробей

Запись:

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ +\ 0{,}02 \\ 14{,}96 \\ \hline 17{,}28 \end{array}$$

Сложение и вычитание десятичных дробей выполняются так же, как сложение и вычитание целых чисел; нужно только записывать каждый разряд под разрядом того же наименования.

Пример. $2{,}3 + 0{,}02 + 14{,}96 = 17{,}28$.

Умножение десятичных дробей. Перемножаем данные числа, как целые, не обращая внимания на запятую. Затем ставим в результате запятую, пользуясь следующим правилом: *в произведении число знаков после запятой равно сумме чисел знаков после запятой во всех сомножителях.*

Пример 1. $2{,}064 \cdot 0{,}05$. Перемножаем целые числа $2064 \cdot 5 = 10\,320$. В первом сомножителе было три знака после запятой, во втором — два. В произведении число знаков после запятой должно быть пять. Отделяем их справа; получаем 0,10320. Нуль, стоящий в конце дроби, можно отбросить: $2{,}064 \cdot 0{,}05 = 0{,}1032$.

До постановки запятой отбрасывать нули при этом способе нельзя [1]).

Пример 2. $1{,}125 \cdot 0{,}08$; $1125 \cdot 8 = 9000$. Число знаков после запятой должно быть $3 + 2 = 5$. Приписывая к 9000 нули слева (009000), отделяем справа пять знаков. Получаем $0{,}09000 = 0{,}09$.

---

[1]) При умножении по способу § 41 отбрасывать нули можно.

§ 28. Деление десятичной дроби на целое число

1. Если делимое меньше делителя, пишем в целой части частного нуль и ставим после него запятую. Затем, не обращая внимания на запятую, присоединяем к целой части делимого первую цифру его дробной части; если получается число, меньшее делителя, ставим после запятой нуль и присоединяем еще одну цифру делимого; если и после этого получаем число, меньшее делителя, ставим еще нуль и т. д., пока не получим числа, превосходящего делитель. В дальнейшем деление совершается так же, как с целыми числами, причем делимое можно неограниченно «расширять» вправо от запятой, приписывая в конце нули.

Замечание. Возможно, что описанный процесс деления никогда не закончится. В таком случае частное нельзя точно выразить десятичной дробью, но, остановившись на некоторой цифре, получим приближенный результат (см. ниже § 30).

Пример 1. 13,28 : 64.

Запись:

```
13,28 | 64
12,8  |------
------| 0,2075
  48
 480
 448
----
  320
```

Здесь число 132, большее делителя, получилось после присоединения первой же цифры дробной части. Поэтому непосредственно после запятой нуля нет. Но первый остаток вместе с присоединенной к нему следующей цифрой делимого (48) меньше делителя, *поэтому после двойки в частном* ставится нуль. Затем «сносится» нуль (делимое «расширяется», принимая вид 13,280); это позволяет продолжить деление. К следующему остатку (32) опять *сносится нуль* (делимое представляем себе в виде 13,2800).

Пример 2. 0,48 : 75.

Запись:

```
0,480 | 75
 450  |-------
----- | 0,0064
  300
```

Здесь после присоединения первой цифры делимого получается число 4, меньшее 75; в частном после запятой ставим нуль; после присоединения второй цифры получаем 48, которое все еще меньше 75. В частном ставим после запятой второй нуль. «Расширяя» дробь одним нулем, получаем 0,480 и т. д.

2. Если делимое больше делителя, делим сначала целую часть; записываем в частном результат деления и ставим запятую. После этого деление продолжается, как в предыдущем случае.

Пример 3. 542,8 : 16.

Запись:

```
542,8 | 16
48    |33,925
 62
 48
 148
 144
   40
   32
    80
```

Разделив целую часть, получим в частном 33, в остатке (второй остаток) 14. После 33 ставим запятую, затем к остатку сносим следующую цифру 8. Полученное число 148 делим на 16; получим 9 — первая цифра после запятой и т. д.

По тому же способу делят целое число на целое, если частное хотят представить в виде десятичной дроби.

Пример 4. 417 : 15.

Запись:

```
417 | 15
30  |27,8
117
105
 120
```

Здесь запятая в частном поставлена после того, как получился последний целый остаток (12). Делимому 417 можно придать вид 417,0; тогда оно представится десятичной дробью.

§ 29. Деление десятичной дроби на десятичную дробь

Чтобы разделить десятичную дробь (или целое число) *на десятичную дробь, отбрасываем запятую в делителе; в делимом же переносим запятую вправо через столько знаков, сколько их было в дробной части делителя* (в случае необходимости к делимому в конце предварительно приписываются нули). После этого выполняем деление, как указано в предыдущем параграфе.

Пример. 0,04569 : 0,0012.

Запись:

```
456,9 | 12
36    |38,075
 96
 96
  90
  84
   60
```

В дробной части делителя 4 знака; поэтому в делимом переносим запятую вправо через 4 знака; получаем 456,9. Делим 456,9 на 12.

§ 30. Обращение десятичной дроби в простую и обратно

Чтобы обратить десятичную дробь в простую, нужно, отбросив запятую, сделать получившееся число числителем дроби; знаменателем же нужно взять число, показывающее, какие доли представляет послед-

ний десятичный знак. Полученную дробь желательно сократить, если это возможно.

Если десятичная дробь превосходит единицу, то предпочтительно обращать в простую дробь только ту ее часть, которая стоит после запятой, целую же часть оставить без изменения.

Пример 1. 0,0125 обратить в простую дробь. Последний десятичный знак представляет десятитысячные доли. Поэтому знаменатель будет 10 000; имеем $0{,}0125 = \frac{125}{10\,000} = \frac{1}{80}$.

Пример 2.

$$2{,}75 = 2\,\frac{75}{100} = 2\,\frac{3}{4}, \text{ или } 2{,}75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}.$$

Предпочтительно, однако, производить вычисление первым из двух указанных способов, т. е., оставляя без изменения двойку, стоящую слева от запятой, обращать в простую дробь число 0,75.

Чтобы обратить простую дробь в десятичную, нужно разделить числитель на знаменатель по правилам § 28 (см. пример 4).

Пример 3. Дробь $\frac{7}{8}$ обратить в десятичную. Делим 7 : 8; получаем 0,875.

В большинстве случаев этот процесс деления может продолжаться бесконечно. Тогда простая дробь не может быть обращена в десятичную точно. На практике этого никогда и не требуется. Деление обрывают в тот момент, когда в частном получены все те десятичные доли, которые имеют практический интерес.

Пример 4. Требуется развесить 1 *кг* кофе на три равные части. Вес каждой части $\frac{1}{3}$ *кг*. Чтобы взвесить это количество, нужно выразить его в десятичных долях килограмма (так как гири в $\frac{1}{3}$ *кг* не имеется). Деля 1 на 3, получим $1:3 = 0{,}333\ldots$ Деление можно продолжать без конца; в частном будут появляться все новые тройки. Но на магазинных весах нельзя учесть малых изменений веса (например, меньших 1 *г*), да и самые зерна кофе весят каждое больше грамма. Практический интерес имеют в данном случае лишь сотые доли килограмма (10 *г*). Поэтому берем $\frac{1}{3}$ *кг* $\approx 0{,}33$ *кг*.

Для большей точности принято учитывать величину первой отбрасываемой цифры. Если она превышает 5, то удерживаемая цифра увеличивается на 1.

Замечание. Даже тогда, когда простую дробь можно точно обратить в десятичную, в большинстве случаев этого не делают. Достигая требуемой степени точности, деление обрывают.

Пример 5. Обратить дробь $\frac{7}{32}$ в десятичную. Точное значение будет 0,21875. Смотря по требуемой степени точности, деление обрывают на второй, третьей и т. д. цифре частного и берут $\frac{7}{32} \approx 0{,}22$, $\frac{7}{32} \approx 0{,}219$ и т. д.

§ 31. Исторические сведения о дробях

Понятие о дроби могло возникнуть у людей лишь после того, как у них образовались некоторые представления о целых числах. Как и понятие целого числа, понятие дроби создалось не сразу. Представление о «половине» возникло гораздо раньше, чем о «третях» и «четвертях», а об этих последних — раньше, чем о дробях с другими знаменателями [1]).

Первые представления о целом числе возникли в процессе счета; первые представления о дробях — из процесса измерения (длин, площадей, веса и т. д.). Следы исторической связи исчисления дробей и системы мер можно обнаружить у многих народов. Так, в вавилонской системе мер веса (и денег) 1 талант составлял 60 мин, а одна мина — 60 шекелей. Соответственно с этим в вавилонской математике широко употреблялись шестидесятеричные дроби (см. II, 7). В древнеримской весовой (и денежной) системе 1 асс делился на 12 унций; сообразно с этим римляне пользовались двенадцатеричными дробями. Дробь, которую мы называем $\frac{1}{12}$, римляне именовали «унцией», хотя бы она употреблялась для измерения длины или иной величины; дробь, которую мы называем $\frac{1}{8}$, римляне называли «полторы унции» и т. п.

[1]) О древности понятия «половина» свидетельствует тот факт, что во всех языках оно имеет особое наименование, не происходящее от слова «два». Выражения «бо́льшая половина», «меньшая половина», «полуживой», «полбеды» и т. д. показывают, что слово «половина» первоначально означало одну из двух частей (не обязательно равных друг другу).

Наши «обыкновенные дроби» широко употреблялись древними греками и индийцами. Правила действий с дробями, изложенные индийским ученым Брамагуптой (8 век н. э.), лишь немногим отличаются от наших. Наша запись дробей тоже совпадает с индийской; только дробной черты индийцы не писали; греки записывали сверху знаменатель, а снизу числитель, но чаще пользовались другими записями, например писали (конечно, своими знаками) $3\,5^x$ (три пятых).

Индийское обозначение дробей и правила действий над ними были усвоены в 9 веке в мусульманских странах благодаря Мухаммеду Хорезмскому (аль-Хваризми, см. II, 7). Они были перенесены в Западную Европу итальянским купцом и ученым Леонардо Фибоначчи из Пизы (13 в.)

Наряду с «обыкновенными» дробями применялись (преимущественно в астрономии) шестидесятеричные дроби. Они были позднее вытеснены десятичными дробями. Последние впервые ввел выдающийся самаркандский ученый Гиясэддин Джемшид ал-Каши (14—15 века). В Европе десятичные дроби были введены в практику голландским купцом и выдающимся инженером-ученым Симоном Стевином (1548—1620).

§ 32. Проценты

Процентом (*от латинского pro cento — с сотни*) *называется сотая часть.* Запись 1% означает 0,01; $27\% = 0{,}27$; $100\% = 1$; $150\% = 1{,}5$ и т. д. [1]).

1% от зарплаты означает 0,01 зарплаты; выполнить весь план—значит выполнить 100% плана; выполнение 150% плана означает выполнение 1,5 плана и т. д.

Чтобы найти процентное выражение данного числа, нужно умножить это число на 100 (или, что то же, перенести в нем запятую через два знака вправо).

Примеры. Процентное выражение числа 2 есть 200%; числа 0,357 есть $35{,}7\%$, числа 1,753 есть $175{,}3\%$.

Чтобы найти число по его процентному выражению, нужно разделить процентное выражение на 100 (или, что то же, перенести запятую через два знака влево).

Примеры. $13{,}5\% = 0{,}135$; $2{,}3\% = 0{,}023$; $145\% = 1{,}45$; ${}^2/_5\% = 0{,}4\% = 0{,}004$.

---

[1]) Обозначение % произошло от искажения записи c_{to} (сокращение слова cento).

Три основные задачи на проценты таковы:

Задача 1. Найти указанный процент данного числа (ср. II, 24, правило 1). Данное число помножается на число процентов, результат делится на 100 (или, что то же, запятая переносится через два знака влево)[1]).

Пример. По плану суточная добыча шахты должна равняться 2860 тоннам угля. Шахта приняла обязательство выполнять 115% плана. Сколько тонн угля должна дать шахта в сутки?

Решение.

1) $2860 \cdot 115 = 328\,900$. 2) $328\,900 : 100 = 3289$ *т*[2]).

Задача 2. Найти число по данной величине указанного его процента (ср. II, 24, правило 2). Данная величина делится на число процентов; результат умножается на 100 (т. е. запятая переносится через два знака вправо)[3]).

Пример. Вес сахарного песка составляет 12,5% от веса переработанной свекловицы. Сколько свекловицы требуется для изготовления 3000 *ц* сахарного песка?

Решение. 1) $3000 : 12{,}5 = 240$. 2) $240 \cdot 100 = 24\,000$ (*ц*)[4]).

Задача 3. Найти выражение одного числа в процентах другого (ср. II, 23, правило 3). Умножаем первое число на 100; результат делим на второе число.

Пример 1. Метод скоростного обжига кирпича, предложенный мастером П. А. Дувановым, позволил ему увеличить выпуск кирпича с одного кубического метра печи с 1200 до 2300 штук. На сколько процентов увеличилось при этом производство кирпича?

Решение. 1) $2300 - 1200 = 1100$,

2) $1100 \cdot 100 = 110\,000$,

3) $110\,000 : 1200 \approx 91{,}67$.

Производство кирпича увеличилось на 91,67%.

Пример 2. По семилетнему плану добыча нефти в СССР должна была составить в 1961 году 161 млн. *т*. Фактическая же добыча составила 166 млн. *т*. На сколько процентов был выполнен план 1961 г. по добыче нефти?

Решение. 1) $166 \cdot 100 = 16600$;

2) $16600 : 161 \approx 103{,}1$.

Фактическое количество добытой нефти в 1961 году составляет 103,1% к запланированному количеству.

---

[1]) Иными словами, данное число помножается на дробь, выражающую указанный процент.

[2]) Описанное действие равносильно следующему: $2860 \cdot 1{,}15 = 3289$.

[3]) Иными словами, данная величина делится на дробь, выражающую указанный процент.

[4]) Описанное действие равносильно следующему: $3000 : 0{,}125 = 24\,000$.

Замечание 1. Во всех трех задачах можно менять порядок действий, например, в последней задаче сначала выполнить деление, а затем результат помножить на 100.

Замечание 2. Нижеприведенный пример предостережет читателя от следующей часто делаемой ошибки.

Пусть требуется узнать, сколько стоил метр ткани до снижения цен, если после понижения продажной цены на 15% эта ткань продается по 12 руб. за метр. Иногда находят 15% от 12 руб., т. е. помножают $12 \cdot 0{,}15 = 1{,}8$. Затем складывают $12 + 1{,}8 = 13{,}8$ и считают, что старая цена была 13,8 руб. за метр. Это неверно, так как процент снижения устанавливается по отношению к прежним ценам, а 1,8 руб. составляет от 13,8 руб. не 15%, а около 13% (см. задачу 3). Правильное решение таково: после снижения цен стоимость ткани составила $100\% - 15\% = 85\%$ от прежней цены. Поэтому прежняя цена (см. задачу 2) составляла $12 : 0{,}85 = 14{,}12$ руб. за метр.

Замечание 3. При всех вычислениях с процентами на практике следует пользоваться способами приближенных вычислений (см. следующие параграфы).

§ 33. О приближенных вычислениях

Числа, с которыми мы имеем дело в жизни, бывают двух родов. Одни в точности дают истинную величину, другие — только приблизительно. Первые называют *точными*, вторые — *приближенными*. Часто мы сознательно берем приближенное число вместо точного, так как последнее нам не требуется. Во многих же случаях точное число невозможно найти по сути дела.

Пример 1. В этой книге 424 страницы; число 424 — точное.

Пример 2. В шестиугольнике 9 диагоналей; число 9 — точное.

Пример 3. Продавец взвесил на автоматических весах 50 *г* масла. Число 50 — приближенное, так как весы нечувствительны к увеличению или уменьшению веса на 0,5 *г*.

Пример 4. Расстояние от ст. Москва до ст. Ленинград Октябрьской ж. д. составляет 651 *км*. Число 651 — приближенное, так как, с одной стороны, наши измерительные инструменты неточны, с другой же стороны, сами станции имеют некоторое протяжение.

Результат действий с приближенными числами есть тоже приближенное число. При этом неточными могут оказаться и те цифры, которые получены действиями над точными цифрами данных чисел.

Пример 5. Перемножаются приближенные числа 60,2 и 80,1. Известно, что все выписанные цифры верны, так что истинные величины могут отличаться от приближенных лишь сотыми, тысячными и т. д. долями. В произведении получаем 4822,02. Здесь могут быть неверными не только цифры сотых и десятых, но и цифры единиц. Пусть, например, сомножители получены округлением (II, 35) *точных* чисел 60,25 и 80,14. Тогда точное произведение будет 4828,435, так что цифра единиц в приближенном произведении (2) отличается от точной цифры (8) на 6 единиц.

Теория приближенных вычислений позволяет: 1) зная степень точности данных, оценить степень точности результатов еще до выполнения действий; 2) брать данные с надлежащей степенью точности, достаточной, чтобы обеспечить требуемую точность результата, но не слишком большой, чтобы избавить вычислителя от бесполезных расчетов; 3) рационализировать самый процесс вычисления, освободив его от тех выкладок, которые не окажут влияния на точные цифры результата.

§ 34. Способ записи приближенных чисел

При приближенных вычислениях отличают запись 2,4 от 2,40, запись 0,02 от 0,0200 и т. д. Запись 2,4 означает, что верны только цифры целых и десятых; истинное же значение числа может быть, например, 2,43 или 2,38 (при отбрасывании цифры 8 происходит округление в сторону увеличения предшествующей ей цифры; см. следующий параграф). Запись 2,40 означает, что верны и сотые доли; истинное число может быть 2,403 или 2,398, но не 2,421 и не 2,382.

То же отличие проводится и для целых чисел. Запись 382 означает, что все цифры верны; если же за последнюю цифру ручаться нельзя, то число округляется, но записывается не в виде 380, а в виде $38 \cdot 10$. Запись же 380 означает, что последняя цифра (0) верна. Если в числе 4720 верны лишь первые две цифры, его нужно записать в виде $47 \cdot 10^2$; это число можно также записать в виде $4,7 \cdot 10^3$ и т. д.

Значащими цифрами называются все верные цифры числа, кроме нулей, стоящих впереди числа. Например, в числе 0,00385 три значащие цифры; в числе 0,03085 четыре значащие цифры; в числе 2500 — четыре; в числе $2{,}5 \cdot 10^3$ — две. Число значащих цифр некоторого числа называется его *значностью*.

§ 35. Правила округления

В приближенных вычислениях часто приходится *округлять* числа как приближенные, так и точные, т. е. отбрасывать одну или несколько последних цифр. Чтобы обеспечить наибольшую близость округленного числа к округляемому, соблюдаются следующие правила.

Правило 1. Если первая из отбрасываемых цифр больше чем 5, то последняя из сохраняемых цифр *усиливается*, т. е. увеличивается на единицу. Усиление совершается и тогда, когда первая из отбрасываемых цифр равна 5, а за ней есть одна или несколько значащих цифр. (О случае, когда за отбрасываемой пятеркой нет цифр, см. ниже, правило 3.)

Пример 1. Округляя число 27,874 до трех значащих цифр, пишем 27,9. Третья цифра 8 усилена до 9, так как первая отбрасываемая цифра 7 больше чем 5. Число 27,9 ближе к данному, чем неусиленное округленное число 27,8.

Пример 2. Округляя число 36,251 до первого десятичного знака, пишем 36,3. Цифра десятых 2 усилена до 3, так как первая отбрасываемая цифра равна 5, а за ней есть значащая цифра 1. Число 36,3 ближе к данному (хотя и незначительно), чем неусиленное число 36,2.

Правило 2. Если первая из отбрасываемых цифр меньше чем 5, то усиления не делается.

Пример 3. Округляя число 27,48 до единиц, пишем 27. Это число ближе к данному, чем 28.

Правило 3. Если отбрасывается цифра 5, а за ней нет значащих цифр, то округление производится *на ближайшее четное* число, т. е. последняя сохраняемая цифра оставляется неизменной, если она четная, и усиливается, если она нечетная. Почему применяется это правило, сказано ниже (см. замечание).

Пример 4. Округляя число 0,0465 до третьего десятичного знака, пишем 0,046. Усиления не делаем, так как последняя сохраняемая цифра 6 — четная. Число 0,046 столь же близко к данному, как 0,047.

Пример 5. Округляя число 0,935 до второго десятичного знака, пишем 0,94. Последняя сохраняемая цифра 3 усиливается, так как она нечетная.

Пример 6. Округляя числа

6,527; 0,456; 2,195; 1,450; 0,950; 4,851; 0,850; 0,05

до первого десятичного знака, получаем:

6,5; 0,5; 2,2; 1,4; 1,0; 4,9; 0,8; 0,0.

Замечание. Применяя правило 3 к округлению одного числа, мы не увеличиваем точность округления (см. примеры 4 и 5). Но при многочисленных округлениях избыточные числа будут встречаться примерно столь же часто, как недостаточные. Взаимная компенсация погрешностей обеспечит наибольшую точность результата.

Правило 3 можно изменить и применять всегда округление на ближайшее нечетное число. Точность будет та же, но четные цифры удобнее, чем нечетные.

§ 36. Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютной погрешностью или, короче, *погрешностью* приближенного числа называется разность между этим числом и его точным значением (из большего числа вычитается меньшее) [1]).

Пример 1. На предприятии 1284 рабочих и служащих. При округлении этого числа до 1300 абсолютная погрешность составляет $1300 - 1284 = 16$. При округлении до 1280 абсолютная погрешность составляет $1284 - 1280 = 4$.

Относительной погрешностью приближенного числа называется отношение (II, 48) абсолютной погрешности приближенного числа к самому этому числу.

Пример 2. В школе 197 учащихся. Округляем это число до 200. Абсолютная погрешность составляет $200 - 197 = 3$. Относительная погрешность равна $\frac{3}{197}$ или, округленно, $\frac{3}{200} = 1{,}5\%$.

В большинстве случаев невозможно узнать точное значение приближенного числа, а значит, и точную величину погрешности. Однако почти всегда можно установить, что погрешность (абсолютная или относительная) не превосходит некоторого числа.

Пример 3. Продавец взвешивает арбуз на чашечных весах. В наборе гирь наименьшая — 50 *г*. Взвешивание

[1]) Иначе говоря, если a есть приближенное число, а x — его точное значение, то абсолютная погрешность есть абсолютное значение (II, 5) разности $a - x$. В некоторых руководствах абсолютной погрешностью называется сама разность $a - x$ (или разность $x - a$). Эта величина может быть положительной или отрицательной.

дало 3600 *г*. Это число — приближенное. Точный вес арбуза неизвестен. Но абсолютная погрешность не превышает 50 *г*. Относительная погрешность не превосходит $\frac{50}{3600} \approx 1,4\%$.

Число, заведомо превышающее абсолютную погрешность (или в худшем случае равное ей), называется *предельной абсолютной погрешностью*. Число, заведомо превышающее относительную погрешность (или в худшем случае равное ей), называется *предельной относительной погрешностью*.

В примере 3 за предельную абсолютную погрешность можно взять 50 *г*, а за предельную относительную погрешность — 1,4%.

Величина предельной погрешности не является вполне определенной. Так, в примере 3 можно принять за предельную абсолютную погрешность 100 *г*, 150 *г* и вообще всякое число, большее чем 50 *г*. На практике берется по возможности меньшее значение предельной погрешности. В тех случаях, когда известна точная величина погрешности, эта величина служит одновременно предельной погрешностью.

Для каждого приближенного числа должна быть известна его предельная погрешность (абсолютная или относительная). Когда она прямо не указана, подразумевается, что предельная абсолютная погрешность составляет половину единицы последнего выписанного разряда. Так, если приведено приближенное число 4,78 без указания предельной погрешности, то подразумевается, что предельная абсолютная погрешность составляет 0,005. Вследствие этого соглашения всегда можно обойтись без указания предельной погрешности числа, округленного по правилам § 35.

Предельная абсолютная погрешность обозначается греческой буквой Δ («дельта»); предельная относительная погрешность — греческой буквой δ («дельта малая»). Если приближенное число обозначить буквой a, то

$$\delta = \frac{\Delta}{a}.$$

Пример 4. Длина карандаша измерена линейкой с миллиметровыми делениями. Измерение показало 17,9 *см*. Какова предельная относительная погрешность этого измерения?

Здесь $a = 17,9$ *см*; можно принять $\Delta = 0,1$ *см*, так как с точностью до 1 *мм* измерить карандаш нетрудно, а значительно уменьшить предельную погрешность не удастся (при навыке можно прочесть на хорошей линейке и 0,02 и даже 0,01 *см*, но у самого карандаша ребра могут разниться на бо́льшую величину). Относительная погрешность равна $\frac{0,1}{17,9}$. Округляя, находим $\delta = \frac{0,1}{18} \approx 0,6\%$.

Пример 5. Цилиндрический поршень имеет около 35 *мм* в диаметре. С какой точностью нужно его измерить микрометром, чтобы предельная относительная погрешность составляла 0,05%?

Решение. По условию, предельная относительная погрешность должна составлять 0,05% от 35 *мм*. Следовательно (§ 32, п. 1), предельная абсолютная погрешность равна $\frac{35 \cdot 0,05}{100} = 0,0175$ (*мм*) или, усиливая, 0,02 (*мм*).

Можно воспользоваться формулой $\delta = \frac{\Delta}{a}$. Подставляя в нее $a = 35$, $\delta = 0,0005$, имеем $0,0005 = \frac{\Delta}{35}$. Значит,

$$\Delta = 35 \cdot 0,0005 = 0,0175 \text{ (мм)}.$$

§ 37. Предварительное округление при сложении и вычитании

Если не все данные числа заканчиваются на одном и том же разряде, то до выполнения сложения или вычитания следует произвести округление. Именно, нужно удержать лишь те разряды, которые верны у всех слагаемых. Остальные отбрасываются как бесполезные. При небольшом числе слагаемых все цифры суммы, кроме последней, будут верны. Последняя может быть не вполне точной. Эту неточность можно свести к минимуму, если учесть влияние цифр следующего разряда (*запасные цифры*).

Пример 1. Найти сумму $25,3 + 0,442 + 2,741$.

Не округляя слагаемых, получим 28,483. Последние две цифры бесполезны, так как в первом слагаемом возможна неточность в несколько сотых. Округляя сумму до точных цифр (т. е. до десятых долей), получаем 28,5. Если произведем округление до точных цифр предварительно, то найдем без лишнего труда $25,3 + 0,4 + 2,7 = 28,4$. Цифра десятых получилась на 1 меньше. Если же учесть и цифры сотых, получим $25,3 + 0,44 + 2,74 = 28,48$, т. е. округленно 28,5. Цифра 5 надежнее, чем 4, хотя не исключена возможность, что верная цифра — именно 4 [1]).

[1]) Если предположить, что первое слагаемое есть округление числа 25,26, то сумма с точностью до 0,01 составляла бы 28,44, т. е. округленно 28,4. Если же 25,3 есть округление числа 25,27 или 25,28 и т. д., то после округления сумма составит 28,5.

При учете запасных цифр вычисление располагается, как показано на схеме (запасные цифры отделены чертой).

Схема:

$$
\begin{array}{r|l}
25{,}3 & \\
+\ 0{,}4 & 4 \\
2{,}7 & 4 \\
\hline
28{,}5 &
\end{array}
$$

Пример 2. Найти сумму $52{,}861+0{,}2563+8{,}1+57{,}35+$ $+0{,}0087$.

Без учета запасных цифр (сохраняем только округленные цифры десятых; см. правила округления, § 35) получаем 118,7. С учетом запасных цифр получаем 118,6. В последнем результате цифра десятых может оказаться неверной вследствие неточности третьего слагаемого; вместо 6 может стоять 5 (если третье слагаемое есть округление числа 8,06). Но цифра 6 гораздо надежнее [1]. Во всяком случае, цифра 7 не может быть верной. Учет запасных цифр дает улучшение, но незначительное. Схема слева показывает сложение без учета запасных цифр, справа — с учетом:

$$
\begin{array}{r}
52{,}9 \\
0{,}3 \\
+\ 8{,}1 \\
57{,}4 \\
\hline
118{,}7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
52{,}8 & 6 \\
0{,}2 & 6 \\
+\ 8{,}1 & \\
57{,}3 & 5 \\
0{,}0 & 1 \\
\hline
118{,}6 &
\end{array}
$$

§ 38. Погрешность суммы и разности

Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей отдельных слагаемых.

Пример 1. Складываются приближенные числа 265 и 32. Пусть предельная погрешность первого есть 5, а второго 1. Тогда предельная погрешность суммы равна $5+$ $+1=6$. Так, если истинное значение первого есть 270, а второго 33, то приближенная сумма $(265+32=297)$ на 6 меньше истинной $(270+33=303)$.

Пример 2. Найти сумму приближенных чисел $0{,}0909+$ $+0{,}0833+0{,}0769+0{,}0714+0{,}0667+0{,}0625+0{,}0588+0{,}0556+$ $+0{,}0526$.

[1] См. предыдущую сноску.

Сложение дает 0,6187. Предельная погрешность каждого слагаемого 0,00005; предельная погрешность суммы $0{,}00005 \times \times 9 = 0{,}00045$. Значит, в последнем (четвертом) знаке суммы возможна ошибка до 5 единиц. Поэтому округляем сумму до третьего знака, т. е. до тысячных. Получаем 0,619; здесь все знаки верные.

Замечание. При значительном числе слагаемых обычно происходит взаимная компенсация погрешностей; поэтому истинная погрешность суммы лишь в исключительных случаях совпадает с предельной погрешностью или близка к ней. Насколько редки эти случаи, видно из примера 2, где у нас 9 слагаемых. Истинная величина каждого из них может отличаться в пятом знаке от взятого приближенного значения на 1, 2, 3, 4 или даже на 5 единиц в ту и в другую сторону. Например, первое слагаемое может быть больше своего истинного значения на 4 единицы пятого знака, второе — на две, третье — меньше истинного на одну единицу и т. д. Подсчет показывает, что число всех возможных случаев распределения погрешностей составляет около одного миллиарда. Между тем лишь в двух случаях погрешность суммы может достигнуть предельной погрешности 0,00045; это произойдет: 1) когда истинная величина каждого слагаемого больше приближенной на 0,00005 и 2) когда истинная величина каждого слагаемого меньше приближенной на 0,00005. Значит, случаи, когда погрешность суммы совпадает с предельной, составляют только 0,0000002% всех возможных случаев.

Дальнейший подсчет показывает, что случаи, когда погрешность суммы девяти слагаемых может превысить три единицы последнего знака, тоже очень редки. Они составляют лишь 0,07% из числа всех возможных. Две единицы последнего знака погрешность может превысить в 2% всех возможных случаев, а одну единицу — примерно в 25%. В остальных 75% случаев погрешность девяти слагаемых не превышает одной единицы последнего знака.

Пример 3. Считая слагаемые примера 2 точными числами[1]), округлим их до тысячных и сложим. Предельная погрешность суммы будет $9 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0045$. Между тем имеем:

$$0{,}091 + 0{,}083 + 0{,}077 + 0{,}071 + 0{,}067 + 0{,}062 + \\ + 0{,}059 + 0{,}056 + 0{,}053 = 0{,}619,$$

[1]) Эти слагаемые получены обращением дробей $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots, \frac{1}{19}$ в десятичные с точностью до четвертого знака. Читатель пусть возьмет другие наугад взятые числа.

т. е. приближенная сумма отличается от истинной на 0,0003, т. е. на треть единицы последнего знака приближенных чисел. Все три знака приближенной суммы верны, хотя теоретически последняя цифра могла быть грубо неверной.

Произведем в наших слагаемых округление до сотых. Теперь предельная погрешность суммы будет $9 \cdot 0{,}005 = 0{,}045$. Между тем получим $0{,}09 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}62$. Истинная погрешность составляет только 0,0013, т. е. $\frac{1}{8}$ единицы последнего знака приближенных чисел.

Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого.

Пример 4. Пусть предельная погрешность приближенного уменьшаемого 85 равна 2, а предельная погрешность вычитаемого 32 равна 3. Предельная погрешность разности $85 - 32 = 53$ есть $2 + 3 = 5$. В самом деле, истинные значения уменьшаемого и вычитаемого могут равняться $85 + 2 = 87$ и $32 - 3 = 29$. Тогда истинная разность есть $87 - 29 = 58$. Она на 5 отличается от приближенной разности 53.

Предельную относительную погрешность суммы и разности легко найти, вычислив сначала предельную абсолютную погрешность (§ 36).

Предельная относительная погрешность суммы (но не разности!) *лежит между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых.* Если все слагаемые имеют одну и ту же (или примерно одну и ту же) предельную относительную погрешность, то и сумма имеет ту же (или примерно ту же) предельную относительную погрешность. Иными словами, в этом случае точность суммы (в процентном выражении) не уступает точности слагаемых. При значительном же числе слагаемых сумма, как правило, гораздо точнее слагаемых (по причине, объясненной в замечании к примеру 2).

Пример 5. В каждом слагаемом суммы $24{,}4 + 25{,}2 + 24{,}7 = 74{,}3$ предельная относительная погрешность примерно одна и та же, именно $0{,}05 : 25 = 0{,}2\%$. Такова же она и для суммы. Здесь предельная абсолютная погрешность равна 0,15, а относительная $0{,}15 : 74{,}3 \approx 0{,}15 : 75 = 0{,}2\%$.

В противоположность сумме *разность приближенных чисел может быть менее точной, чем уменьшаемое и вычитаемое.* «Потеря точности» особенно велика в том случае, когда уменьшаемое и вычитаемое мало отличаются друг от друга.

Пример 6. Измерение внешнего и внутреннего диаметра тонкостенной трубки дало для первого 28,7 *мм*, а для второго 28,3 *мм*. Вычислив по этим данным толщину стенки, найдем $\frac{1}{2}\cdot(28,7-28,3)=0,2$ (*мм*). Предельная относительная погрешность уменьшаемого (28,7) и вычитаемого (28,3) одна и та же: $\delta=0,2\%$. Предельная относительная погрешность разности 0,4 (а также ее половины 0,2) составляет 25%.

Ввиду указанного факта следует всегда, когда это возможно, *избегать вычисления искомой величины с помощью вычитания близких чисел*. Ср. III, 26, пример 9.

§ 39. Погрешность произведения

Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей. (О точной величине предельной погрешности см. замечание к примеру 1.)

Пример 1. Пусть перемножаются приближенные числа 50 и 20 и пусть предельная относительная погрешность первого сомножителя есть 0,4%, а второго 0,5%. Тогда предельная относительная погрешность произведения $50\times\times 20=1000$ приближенно равна 0,9%. В самом деле, предельная абсолютная погрешность первого сомножителя есть $50\cdot 0,004=0,2$, а второго $20\cdot 0,005=0,1$. Поэтому истинная величина произведения не больше чем $(50+0,2)(20+0,1)==1009,02$ и не меньше чем $(50-0,2)(20-0,1)=991,02$. Если истинная величина произведения есть 1009,02, то погрешность произведения равна $1009,02-1000=9,02$, а если 991,02, то погрешность произведения равна $1000-991,02==8,98$. Рассмотренные два случая — самые неблагоприятные. Значит, предельная абсолютная погрешность произведения есть 9,02. Предельная относительная погрешность равна $9,02:1000=0,902\%$, т. е. приближенно 0,9%.

Замечание. Обозначим предельную относительную погрешность произведения буквой δ, а предельную относительную погрешность сомножителей — буквами δ_1 и δ_2 (в примере 1 $\delta_1=0,004$; $\delta_2=0,005$; $\delta=0,00902$)

Наше правило (для двух сомножителей) запишется так:

$$\delta\approx\delta_1+\delta_2.$$

Точное же выражение δ будет:

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2,$$

т. е. предельная относительная погрешность произведения всегда больше, чем сумма предельных относительных погрешностей сомножителей; она превышает эту сумму на произведение *относительных погрешностей сомножителей*. Это превышение обычно так невелико, что его не приходится учитывать. В условиях примера 1 имеем $\delta = 0{,}004 + 0{,}005 + 0{,}004 \cdot 0{,}005 = 0{,}00902$. Превышение здесь составляет $0{,}00902 - 0{,}009 = 0{,}00002$, т. е. около $0{,}2\%$ от приближенной величины предельной относительной погрешности. Это превышение столь незначительно, что его нет смысла учитывать.

Пример 2. Пусть перемножаются приближенные числа 53,2 и 25,0. Предельная абсолютная погрешность каждого есть 0,05. Поэтому $\delta_1 = 0{,}05 : 53{,}2 = 0{,}0009$; $\delta_2 = 0{,}05 : 25{,}0 = 0{,}002$. Предельная относительная погрешность произведения $53{,}2 \cdot 25{,}0 = 1330$ приближенно равна $0{,}0009 + 0{,}0020 = 0{,}0029$. *Величина* $\delta_1\delta_2 = 0{,}0009 \cdot 0{,}002 = 0{,}0000018$ столь мала, что учитывать ее нет смысла. Предельная абсолютная погрешность произведения 1330 равна $1330 \cdot 0{,}0029 \approx 4$, так что последняя цифра произведения (нуль) может быть неверной.

Пример 3. Найти объем комнаты по данным измерения: длина 4,57 *м*, ширина 3,37 *м*, высота 3,18 *м* (предельные абсолютные погрешности 0,005 *м*). Перемножая данные числа, находим, что объем составляет 48,974862 $м^3$. Но здесь лишь две цифры безусловно верны, уже в третьей цифре может быть небольшая погрешность. Действительно, предельные относительные погрешности сомножителей равны: $\delta_1 = 0{,}005 : 4{,}57 \approx 0{,}0011$; $\delta_2 = 0{,}005 : 3{,}37 \approx 0{,}0015$; $\delta_3 = 0{,}005 : 3{,}18 \approx 0{,}0016$. Предельная относительная погрешность произведения есть $\delta = 0{,}0011 + 0{,}0015 + 0{,}0016 = 0{,}0042$. Предельная абсолютная погрешность произведения $\Delta \approx 49{,}0 \cdot 0{,}0042 \approx 0{,}21$. Поэтому уже третья значащая цифра произведения ненадежна. Значит, нужно считать, что объем комнаты составляет 49,0 $м^3$.

§ 40. Подсчет точных знаков при умножении

Погрешность произведения можно оценить проще (но зато грубее), чем по способу § 39. Эта оценка основана на следующем правиле:

Пусть перемножаются два приближенных числа и пусть каждое имеет по k значащих цифр. Тогда $(k-1)$-я цифра произведения безусловно верна, а k-я цифра может быть не вполне точной. Однако погрешность произведения не превосходит $5^1/_2$ единиц k-й цифры и лишь в исключительных случаях близка к этому пределу. Если же первые цифры сомножителей в произведении дают число, большее десяти (с учетом влияния следующих цифр или без этого учета), то погрешность произведения не превышает одной единицы k-й цифры.

Пример 1. Перемножим приближенные числа 2,45 и 1,22, имеющие каждое по три значащих цифры. В произведении 2,9890 первые две цифры безусловно верны. Третья цифра может быть не вполне точной. При данных величинах сомножителей предельная абсолютная погрешность произведения (ее можно найти, как в примере 1 § 39) составляет 1,8 единицы третьей цифры (т. е. 0,0018); истинная погрешность, как правило, будет еще меньше. Поэтому третью цифру следует удержать; четвертую же цифру нет смысла сохранять. Округляя, имеем $2,45 \times \times 1,22 \approx 2,99$.

Пример 2. Перемножим приближенные числа $46,5 \times \times 2,82$. В произведении 131,130 первые две цифры безусловно верны. Так как первые цифры сомножителей с учетом влияния следующих цифр дают в произведении 13 (первые две цифры числа 131,130), то погрешность произведения безусловно не превосходит единицы. В данном случае предельная абсолютная погрешность произведения составляет только 0,37; истинная же погрешность, как правило, будет еще меньше. Поэтому третью цифру нужно удержать. Четвертую же цифру (не вполне точную) имеет смысл удерживать (в качестве запасной) лишь в том случае, когда над произведением нужно выполнять дальнейшие действия.

При перемножении трех, четырех и т. д. приближенных чисел предельная погрешность пропорционально возрастает (т. е. увеличивается по сравнению с вышеуказанной в полтора, два и т. д. раза). Но в подавляющем большинстве случаев истинная погрешность при небольшом числе сомножителей остается в тех же границах (вследствие компенсации погрешностей; ср. § 38).

Практические выводы.

1. Если перемножаются приближенные числа с одним и тем же количеством значащих цифр, то в произведении следует удержать столько же значащих цифр. Последняя из удержанных цифр будет не вполне надежна.

2. Если некоторые сомножители имеют больше значащих цифр, чем другие, то еще до умножения следует первые округлить, сохранив в них столько цифр, сколько имеет наименее точный сомножитель, или еще одну (в качестве запасной). Дальнейшие цифры удерживать бесполезно.

3. Если требуется, чтобы произведение двух чисел имело заранее данное число вполне надежных цифр, то в каждом из сомножителей число точных цифр (найденных измерением или вычислением) должно быть на единицу больше. Если количество сомножителей больше двух и меньше десяти, то в каждом из сомножителей число точных цифр для полной гарантии должно быть на две единицы больше, чем требуемое число точных цифр. Практически же вполне достаточно взять лишь одну лишнюю цифру.

Чтобы проверить эти выводы, рассмотрим пример, где наперед известны точные значения перемножаемых приближенных чисел.

Пример 3. Обратим произведение

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{3003}$$

в десятичную дробь. Взяв 4 значащие цифры, получим 0,0003330. Пусть теперь нам известны только приближенные значения сомножителей:

$$\frac{1}{3}=0{,}33333;\quad \frac{1}{7}=0{,}14286;\quad \frac{1}{11}=0{,}09091;\quad \frac{1}{13}=0{,}07692\ ^{1)},$$

и требуется найти произведение с двумя значащими цифрами. Для полной гарантии мы должны взять все сомножители с четырьмя значащими цифрами, т. е. перемножить

$$0{,}3333\cdot 0{,}1429\cdot 0{,}09091\cdot 0{,}07692.$$

1) Находим $0{,}3333\cdot 0{,}1429=0{,}04762857$.

Удерживая четыре значащие цифры, получаем 0,04763.

2) Выполняем следующее умножение:

$$0{,}04763\cdot 0{,}0909=0{,}0043300433.$$

3) Удерживая четыре значащие цифры [2]) и выполняя последнее умножение, находим:

$$0{,}004330\cdot 0{,}07692=0{,}0003331.$$

---

[1]) Читателю рекомендуется взять любые другие сомножители.

[2]) Здесь достаточно было бы удержать по три значащие цифры.

Две первые значащие цифры безусловно правильны, так что искомое число есть 0,00033. За полную точность третьей значащей цифры заранее нельзя поручиться. Но она оказывается верной. Четвертая значащая цифра не вполне точна, но ошибка не превышает единицы соответствующего разряда.

Если вести наше вычисление на три знака, то нельзя заранее поручиться за вторую цифру. Однако на самом деле даже третья цифра будет верна. Именно:

1) $0{,}333 \cdot 0{,}143 = 0{,}047619$;

2) $0{,}0476 \cdot 0{,}0909 = 0{,}00432684$;

3) $0{,}00433 \cdot 0{,}0769 = 0{,}000333$.

Если вести вычисление на два знака, то в произведении получится 0,00032, т. е. ошибка составит 1,3 единицы второго знака.

§ 41. Сокращенное умножение

Применяя правила умножения точных чисел к числам приближенным, мы нерационально тратим время и труд на вычисление тех цифр, которые затем нужно откинуть. Вычислительный процесс можно рационализировать, если руководствоваться следующими правилами:

1) умножение начинают не с низших разрядов множителя, а с высших; при умножении множимого на наивысший разряд множителя умножение выполняется полностью;

2) перед умножением на следующий разряд множителя в множимом вычеркивается последняя цифра, умножение производится на укороченное множимое, но к результату прибавляется округленное произведение взятого разряда множителя на отброшенную цифру множимого;

3) перед умножением на третий (от начала) разряд множителя зачеркивается еще одна цифра множимого (вторая от конца); умножение производится на остающиеся цифры множителя, при этом учитывается влияние только что отброшенной цифры и т. д.;

4) получаемые произведения располагаются так, чтобы друг под другом располагались все *низшие* разряды;

5) для определения места запятой в произведении существуют особые правила, но практичнее всего основываться на грубой предварительной оценке величины произведения. Рекомендуется во избежание ошибок зачеркивать уже использованную цифру множителя.

Пример 1. Перемножить приближенные числа $6{,}7428 \cdot 23{,}25$. Уравниваем число значащих цифр: в первом сомножителе отбрасываем цифру 8, заменяя предыдущую цифру 2 тройкой. Вычисляем по приводимой схеме в следующем порядке:

Запись:

$$\begin{array}{r} 6{,}743 \\ \times\ 23{,}25 \\ \hline 13486 \\ +\ 2023 \\ 135 \\ 34 \\ \hline 156{,}78 \end{array}$$

1) не обращая внимания на запятые, множим 6743 на 2, результат 13 486 выписываем полностью; умножение производится, как обычно, начиная с $2 \times 3 = 6$ (эта шестерка подписывается под низшими разрядами сомножителей);

2) зачеркиваем использованную цифру множителя 2 и последнюю цифру множимого 3; умножаем следующую цифру множителя 3 на укороченное множимое 674, предварительно учтя, что зачеркнутая цифра 3 дала бы в произведении $3 \cdot 3 = 9$; поэтому к произведению прибавляется 1 (с самого же начала умножения $3 \cdot 4 = 12$; $12 + 1 = 13$; 3 записано; 1 удержано в уме). Низший разряд произведения (3) записывается под низшим разрядом предыдущего произведения (6);

3) зачеркивая вторую от начала цифру множителя и вторую от конца цифру множимого, множим третью цифру множителя 2 на укороченное множимое 67; предварительно замечаем, что от умножения этой цифры множителя на только что отброшенную цифру множимого получили бы 8, так что к произведению прибавляем 1;

4) наконец, зачеркнув еще 2 в множителе и 7 в множимом, умножаем 5 на 6, предварительно заметив, что $5 \cdot 7 = 35$, так что к произведению $5 \cdot 6 = 30$ прибавляем четверку (лучше, чем тройку, так как умножать нужно было бы не только на цифру 7, но и на следующие за ней отброшенные цифры);

5) все полученные произведения складываем, получаем 15 678.

Чтобы выбрать место запятой, грубо округляем сомножители, беря вместо первого, например, 6, вместо второго 20. Искомое произведение грубо равняется 120, т. е. целая часть нашего результата является трехзначным числом; следовательно, в нашем результате нужно отделить запятой первые три цифры, т. е. нужно взять 156,78, а не 15,678 и не 1567,8. В этом результате верны только первые четыре цифры. Последнюю цифру (которая может содержать ошибку до трех единиц) используем для округления результата и получаем 156,8.

Пример 2. $674{,}3 \cdot 232{,}5$. Умножение производим, как в предыдущем примере. Получив 15 678, выбираем место запятой. Грубое умножение дает $600 \cdot 200 = 120\,000$, т. е.

шестизначное число. Так как целая часть нашего результата должна содержать шесть цифр, а полученное нами число 15 678 содержит пять цифр, то приписываем к этому числу справа нуль; место запятой выходит за пределы выписанных цифр, т. е. результат нашего умножения выражается целым числом 156 780. Так как последняя цифра (нуль) заведомо неверна, пишем результат в виде $15\,678 \cdot 10$ или $1568 \cdot 10^2$ (см. II, 34).

§ 42. Деление приближенных чисел

Правило 1. *Предельная относительная погрешность частного приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя* (ср. § 39).

Пример 1. Приближенное число 50,0 делится на приближенное число 20,0. Предельная погрешность делимого и делителя 0,05. Тогда предельная относительная погрешность делимого есть $\frac{0,05}{50,0} = 0,1\%$, а предельная относительная погрешность делителя есть $\frac{0,05}{20,0} = 0,25\%$. Предельная относительная погрешность частного $50,0 : 20,0 = 2,50$ должна составлять приблизительно $0,1\% + 0,25\% = 0,35\%$.

Действительно, истинная величина частного не больше, чем $(50,0 + 0,05) : (20,0 - 0,05) = 2,50877$, и не меньше, чем $(50,0 - 0,05) : (20,0 + 0,05) = 2,49127$. Если истинное значение частного есть 2,50877, то абсолютная погрешность составляет $2,50877 - 2,50 = 0,00877$. Если же истинное значение есть 2,49127, то абсолютная погрешность составит $2,50 - 2,49127 = 0,00873$. Рассмотренные случаи — самые неблагоприятные. Значит, предельная относительная погрешность составляет $0,00877 : 2,50 = 0,00351$, т. е. приближенно $0,35\%$.

Замечание. Точная величина предельной относительной погрешности всегда превышает приближенную, вычисленную по правилу 1. Процент превышения примерно равен предельной относительной погрешности делителя. В нашем примере превышение составляет 0,00001, что составляет $0,29\%$ от 0,0035. Предельная же относительная погрешность делителя равна $0,25\%$.

Пример 2. Найти предельную абсолютную погрешность частного $2,81 : 0,571$.

Решение. Предельная относительная погрешность делимого есть $0,005 : 2,81 = 0,2\%$; делителя $0,0005 : 0,571 =$

$=0{,}1\%$; частного $0{,}2\% + 0{,}1\% = 0{,}3\%$. Предельная абсолютная погрешность частного приближенно равна $\frac{2{,}81}{0{,}571} \times$ $\times 0{,}003 = 0{,}015$. Значит, в частном $2{,}81 : 0{,}571 = 4{,}92$ уже третья значащая цифра ненадежна.

Более простая, но зато более грубая оценка точности частного основана на подсчете точных цифр (ср. § 40). Вот эта оценка:

Правило 2. *Пусть делимое и делитель имеют каждое по k значащих цифр. Тогда абсолютная погрешность частного в худшем случае близка к* 1,05 *единицы* ($k-1$)*-го знака* (этого значения она никогда не достигает).

Как видим, предельная погрешность частного теоретически вдвое больше предельной погрешности произведения (§ 40). Однако на самом деле погрешность частного превосходит 5 единиц k-й цифры лишь в исключительных случаях (один раз из тысячи). Поэтому *в частном следует брать столько же значащих цифр, сколько их имеют делимое и делитель.*

Если же одно из данных чисел (делимое или делитель) имеет больше значащих цифр, чем другое, то следует отбросить все лишние цифры или сохранить только первую из них (в качестве запасной).

Если требуется, чтобы частное имело заранее данное число верных цифр, то в делимом и делителе нужно иметь *на одну значащую цифру больше.*

§ 43. Сокращенное деление

Во избежание излишних выкладок деление приближенных чисел можно выполнять следующим образом:

1) Не обращая внимания на положение запятых, получаем первую цифру частного так же, как при делении целых чисел. Если значащие цифры делимого образуют число, большее, чем значащие цифры делителя (оба числа рассматриваются как целые), то первая цифра частного умножается на весь делитель. В противном случае в делителе зачеркиваем последнюю цифру и умножаем на укороченный делитель, но в результате учитываем влияние отброшенной цифры. Так, если делим 2262 на 7646, то первая цифра частного 2 ($22:7=3$ с остатком, но 3 не годится, берем 2). Она умножается на 764, к результату прибавляется 1 (это — первая цифра произведения $2 \cdot 6 = 12$). Это делается сразу при умножении на последнюю цифру укороченного делителя.

2) Результат умножения первой цифры частного на делитель (или на укороченный делитель) записываем под делимым — низший разряд под низшим и так далее. Затем находим остаток.

3) Вместо того чтобы к остатку сносить нуль, укорачиваем делитель, зачеркивая в нем последнюю цифру (если укорочение уже делалось, то теперь производим отбрасывание последней из оставшихся цифр). Подобрав вторую цифру частного, умножаем ее на укороченный делитель, учитывая влияние только что отброшенной цифры.

4) Подписываем результат умножения под первым остатком — низший разряд под низшим и т. д. Находим второй остаток.

5) Вместо снесения нуля укорачиваем делитель еще на одну цифру и т. д.

6) Получив частное, определяем место запятой по грубой предварительной оценке.

Пример 1. 58,83 : 9,658.

Запись:

$$\begin{array}{r|l} 58{,}83 & 9{,}658 \\ -\,57{,}95 & \overline{6{,}092} \\ \hline 88 & \\ -\,86 & \\ \hline 2 & \\ -\,2 & \\ \hline \end{array}$$

1) Так как 5883 меньше 9658, то с самого начала зачеркиваем последнюю цифру делителя 8. Первая цифра частного 6. Помножаем эту цифру на 965, учитывая, что отброшенная цифра даст 5 единиц ($6 \cdot 8 = 48$; 8 отбрасываем, 4 округляем до 5).

2) Произведение 5795 подписываем под делимым — разряд под разрядом. Остаток 88.

3) Зачеркиваем вторую с конца цифру делителя 5. Укороченный делитель 96 не содержится ни разу в делимом 88; ставим в частном нуль [1]); никакого умножения производить не нужно.

4) Нет нужды находить и второй остаток.

5) Зачеркиваем еще одну цифру делителя 6. Укороченный делитель 9 содержится в остатке девять раз. Поэтому третья цифра частного 9. Умножая на укороченный делитель с учетом влияния зачеркнутой цифры, имеем 86. Остаток 2. На этом действие не заканчивается. «Отбрасывая» последнюю оставшуюся цифру, но учитывая ее влияние на результат, мы находим в частном еще цифру 2 ($2 \cdot 9 = 18$; 8 отбрасывается и 1 округляется до 2). Проще всего получить последнюю цифру, снеся мысленно нуль к последнему остатку 2; получаем $20 : 9 \approx 2$.

---

[1]) Обращаю особое внимание на этот момент; часто делают грубую ошибку: не позаботившись поставить нуль, торопятся отбрасывать следующую цифру делителя.

6) Место запятой определяется по грубому подсчету. В делимом и делителе оставляем только целые части; ясно, что $58:9 \approx 6$, т. е. целая часть частного есть число однозначное. Поэтому результат равен 6,092, а не 60,92 и не 6092 и так далее.

Все цифры результата верны.

Пример 2. 98,10 : 0,3216.

Запись:

$$\begin{array}{r|l} 98,10 & 0,3216 \\ -\;96,48 & \overline{305,0} \\ \hline 1\,62 & \\ -\;1\,61 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

1) 9810 больше чем 3216. Первую цифру частного 3 множим на 3216. Получаем 9648. 2) Остаток 162. 3) Зачеркиваем последнюю цифру делителя 6. Укороченный делитель 321 не содержится в остатке ни одного раза; вторая цифра результата — нуль. 4 — 5) Зачеркиваем еще одну цифру делителя 1; остаток 162 делится на укороченный делитель 32; третья цифра частного 5. Умножая ее на 32 и учитывая влияние отброшенной цифры делителя, получаем 161. Вычитаем из остатка. Получаем 1. Зачеркиваем цифру 2 в делителе. Укороченный делитель 3 ни разу не содержится в остатке 1. Поэтому последняя цифра частного — нуль. 6) Запятую ставим на основе грубого округления данных чисел: беря 100 вместо 98,10 и 0,3 вместо 0,3216, видим, что $100:0,3 \approx 300$, т. е. целая часть частного трехзначна. Значит, частное есть 305,0.

§ 44. Возведение в степень и извлечение квадратного корня из приближенных чисел

Возведение в (целую) степень есть повторное умножение, и потому к нему относится все сказанное в §§ 40—41. При возведении в небольшую степень результат имеет столько же верных цифр, сколько взятое число, или содержит небольшую ошибку в последнем знаке. Если же степень велика, то накопление небольших ошибок может отразиться и на цифрах высшего разряда.

При извлечении корня любой степени результат имеет по меньшей мере столько же верных цифр, сколько их было в подкоренном числе. Так, извлекая квадратный корень из приближенного числа 40,00, можно получить четыре верные цифры ($\sqrt{40,00} \approx 6,324$) [1].

---

[1]) Если пользоваться способом извлечения квадратного корня, обычно изучаемым в школе, то, чтобы получить в результате 6,324, надо подкоренное число представить в виде 40,000000, т. е. приписать к нему четыре нуля справа. Приписанные нули будут *неверными* цифрами, но соответствующие цифры результата верны. Результат останется тем же, если вместо четырех нулей дописать четыре произвольно взятые цифры.

Способ извлечения квадратного корня, обычно изучаемый в школе, громоздок и трудно запоминается, а теоретическое его обоснование для большинства учащихся остается недоступным. Ниже приводится простой и легко запоминаемый способ извлечения квадратного корня (с любой требуемой степенью точности). Этот способ описан древнегреческим ученым *Героном примерно* 2000 лет назад[1]). Тот же способ можно применить и для извлечения корня третьей (и более высокой) степени (см. ниже § 44а).

Правило извлечения квадратного корня. Чтобы извлечь квадратный корень, берем «на глаз» первое приближение и поступаем так:

1) Делим подкоренное число на первое приближение корня; если окажется, что полученное частное разнится от первого приближения на величину, не превышающую допустимой погрешности, то корень извлечен.

2) В противном случае находим среднее арифметическое (II, 45) делителя и частного. Это среднее арифметическое дает значительно более точное значение (второе приближение) корня. При сколько-нибудь умелом выборе первого приближения второе приближение дает 3 верные цифры, а обычно не менее 4 верных цифр. Вообще в каждом новом приближении число верных цифр удваивается по сравнению с предыдущим.

3) Подвергаем второе приближение такому же испытанию, как первое, т. е. делим подкоренное число на второе приближение. Если бы оказалось, что точность результата недостаточна, то находим третье приближение тем же способом, каким нашли второе, и т. д.

Замечание 1. Изложенный способ «не боится ошибок»: он автоматически исправляет арифметическую ошибку, если таковая допущена на предыдущем этапе. Единственным вредным последствием будет замедление выкладки.

Пример 1. $\sqrt{40{,}00}$. Подкоренное число имеет четыре верные цифры; вычислять более четырех цифр корня нет смысла. Найдем четыре цифры.

За первое приближение надо принять какое-нибудь число, заключенное между 6 и 7 (так как $6^2=36$ меньше подкоренного числа, а $7^2=49$ — больше). В этих границах можно взять любое число, но если хотим сэкономить даль-

---

1) Герон пользовался простыми дробями; мы, конечно, будем пользоваться десятичными дробями.

нейший труд, то надо взять какое-то число, меньшее чем 6,5 (так как подкоренное число значительно ближе к 6^2, чем к 7^2). Возьмем, например, 6,4 [1]). Далее поступаем так:

1) Делим подкоренное число 40,00 на первое приближение 6,4. Получаем $40{,}00 : 6{,}4 = 6{,}25$. Уже во второй цифре частное 6,25 разнится от делимого 6,4. Точность результата недостаточна.

2) В качестве второго приближения берем среднее арифметическое делимого 6,40 и частного 6,25. Получаем $(6{,}40 + 6{,}25) : 2 = 6{,}325$. Можно ожидать, что в этом втором приближении верны если не все четыре, то первые три цифры.

3) Для контроля делим подкоренное число 40,00 на второе приближение 6,325 (доводя деление до четвертой цифры): $40{,}00 : 6{,}325 \approx 6{,}324$. Полученное частное 6,324 разнится от делителя 6,325 лишь на единицу четвертого знака. Отсюда следует, что корень (с требуемой степенью точности) найден.

Действительно, если возвести число 6,324 в квадрат, т. е. помножить его на 6,324, то получим число, меньшее чем произведение $6{,}324 \cdot 6{,}325$, которое (приближенно) составляет 40,00. Если же возвести в квадрат число 6,325, то получится число, большее чем $6{,}325 \cdot 6{,}324 \approx 40{,}00$. Следовательно, искомый квадратный корень лежит между 6,324 и 6,325. Поэтому искомый корень разнится от 6,324 (или от 6,325) меньше чем на единицу четвертого знака:

$$\sqrt{40{,}00} \approx 6{,}324 \text{ (все 4 знака верны).}$$

Пример 2. $\sqrt{23{,}5}$. Искомый корень заключается между 4 и 5 и лежит гораздо ближе к 5, чем к 4 (так как 23,5 гораздо ближе к 25, чем к 16). Возьмем за первое приближение круглое число 5,0.

1) Делим подкоренное число 23,5 на первое приближение 5,00 (доводя частное до третьей цифры): $23{,}5 : 5{,}0 = 4{,}70$.

2) В качестве второго приближения берем среднее арифметическое $(5{,}00 + 4{,}70) : 2 = 4{,}85$. Можно ожидать, что все три цифры верны.

3) Для контроля делим подкоренное число 23,5 на второе приближение 4,85. Получаем $23{,}5 : 4{,}85 \approx 4{,}85$. Так как частное равно (с точностью до третьего знака) делителю,

---

[1]) Можно взять 6,3 или 6,2, но брать 6,1 нет смысла, ибо 6,1 слишком близко к 6.

то корень извлечен (с максимально возможной степенью точности):

$$\sqrt{23{,}5} \approx 4{,}85.$$

Замечание 2. Если подкоренное число есть десятичная дробь, имеющая в целой части одну значащую цифру или нуль, то для подыскания первого приближения рекомендуется перенести запятую вправо через две, четыре, шесть и т. д. цифр с таким расчетом, чтобы в целой части оказалось небольшое число знаков. Далее поступаем, как в примерах 1 и 2, и в окончательном результате переносим запятую в обратном направлении через одну, две, три и т. д. цифры.

Аналогично можно поступать в тех случаях, когда подкоренное число имеет многозначную целую часть; но тогда запятая вначале переносится *влево* через две, четыре, шесть и т. д. цифр.

В подкоренном числе запятую можно переносить *только через четное число цифр.*

Пример 3. $\sqrt{0{,}008732}$. Переносим запятую через 4 знака вправо. Получаем 87,32; при выборе первого приближения будем учитывать только целую часть. Примем за первое приближение, скажем, число 9,3.

1) Делим 87,32 на 9,3. Продолжая деление до четвертой значащей цифры, получим $87{,}32 : 9{,}3 \approx 9{,}389$.

2) Находим среднее арифметическое

$$(9{,}300 + 9{,}389) : 2 \approx 9{,}344.$$

3) Для контроля выполняем деление $87{,}32 : 9{,}344 \approx 9{,}345$. Значит, в любом из чисел 9,344 и 9,345 все четыре знака — верные (первое дает недостаточное приближение, второе — избыточное).

4) Так как вначале мы перенесли запятую вправо через 4 знака, то в обратном направлении (т. е. влево) запятую надо перенести через 2 знака. Получаем

$$\sqrt{0{,}008732} \approx 0{,}09344.$$

Пример 4. $\sqrt{8732000}$. Переносим запятую влево через 6 цифр. Получаем 8,732 (если перенести запятую через 4 цифры, получим 873,2, но не 87,32, как в предыдущем примере!). За первое приближение примем число 3.

1) $8{,}732 : 3 = 2{,}911$.

2) $(3{,}000 + 2{,}911) : 2 = 2{,}955$.

Из первого действия ясно, что в первом приближении (3,000) были две верные цифры. Поэтому надо ожидать, что во втором приближении будут верны 4 цифры. Контроль подтверждает это.

3) Так как вначале мы перенесли запятую влево через 6 знаков, то теперь переносим ее в обратном направлении через 3 знака:

$$\sqrt{8732000} \approx 2955.$$

§ 44а. Правило извлечения кубического корня

Чтобы извлечь кубический корень, берем «на глаз» первое приближение и поступаем так:

1) Деление на первое приближение (ср. правило § 44) выполняется дважды: сначала делимым служит подкоренное число, а затем — число, полученное в результате первого деления. Если частное (полученное после *второго* деления) разнится от первого приближения (т. е. от делителя) на величину, не превышающую допустимой погрешности, то *корень извлечен*.

2) В противном случае находим среднее арифметическое трех чисел, а именно частного (от двух делений) и дважды взятого делителя [1]). Получаем второе приближение; у него (при сколько-нибудь умелом выборе первого приближения) три цифры будут верными, а четвертая в худшем случае потребует исправления на 1.

3) Второе приближение можно подвергнуть такому же испытанию, как первое; но этот контроль утомителен.

Пример 1. $\sqrt[3]{785{,}0}$ Искомый корень заключен между 9 и 10. За первое приближение возьмем 9,2 (так как подкоренное число примерно в 4 раза ближе к 9^3, чем к 10^3).

1) Надо разделить на 9,2 сначала подкоренное число 785,0, а затем частное 785,0 : 9,2. Вместо этого можно разделить 785 на $9{,}2^2 = 84{,}64$. Получаем

$$785{,}0 : 9{,}2 : 9{,}2 = 785{,}0 : 84{,}64 \approx 9{,}275.$$

Как видим, первое приближение имеет две верные цифры. Чтобы наилучшим образом найти второе приближение, учтем, что подкоренное число 785,0 оказалось произведением трех неравных сомножителей: $785{,}0 = 9{,}2 \cdot 9{,}2 \times$ $\times\, 9{,}275$, а нам надо представить его в виде произведения

---

[1]) Откуда возникает это второе действие — будет видно из примера 1.

трех равных сомножителей: $785{,}0 = x \cdot x \cdot x$ (где $x = \sqrt[3]{785{,}0}$). Естественно предположить, что каждый из этих равных сомножителей должен примерно равняться среднему арифметическому сомножителей 9,2, 9,2 и 9,275.

2) Итак, в качестве второго приближения берем среднее арифметическое $(9{,}275 + 9{,}200 + 9{,}200) : 3 = 9{,}225$. Вычисление рекомендуется производить по сокращенному способу (II, 46).

3) Для контроля можно разделить подкоренное число 785,0 на второе приближение 9,225, и результат еще раз разделить на 9,225 (или разделить подкоренное число на $9{,}225^2 \approx 85{,}09$). Получим 9,225 (если при вычислениях не сохранять запасную цифру, получится 9,224):

$$\sqrt[3]{785{,}0} \approx 9{,}225 \text{ (все 4 цифры верны).}$$

З а м е ч а н и е. При подыскании первого приближения бывает полезно перенести запятую в подкоренном числе вправо (или влево) через 3, 6, 9 и т. д. цифр (ср. II, 44, замечание 2). В окончательном результате переносим запятую в обратном направлении через 1, 2, 3 и т. д. цифры. Переносить запятую можно *только через такое число цифр, которое делится на* 3.

П р и м е р 2. $\sqrt[3]{1835 \cdot 10}$. В подкоренном числе 18 350 переносим запятую (подразумеваемую после цифры единиц) влево через три цифры. Получаем 18,35. Это число находится примерно посредине между $2^3 = 8$ и $3^3 = 27$. Поэтому за первое приближение принимаем 2,5.

1) Надо дважды выполнить деление на 2,5 или, что то же, один раз разделить число 18,35 на $2{,}5^2$. Получаем

$$18{,}35 : 2{,}5 : 2{,}5 = 18{,}35 : 6{,}25 \approx 2{,}94.$$

Как видим, в первом приближении верна только одна цифра. Значит, надо ожидать, что во втором приближении будут лишь две верные цифры. Поэтому в следующем действии ведем вычисление лишь на два знака.

2) В качестве второго приближения берем среднее арифметическое $(2{,}5 + 2{,}5 + 2{,}9) : 3 \approx 2{,}6$.

3) Чтобы уточнить результат, надо дважды выполнить деление на 2,6. Получаем

$$18{,}35 : 2{,}6 : 2{,}6 = 18{,}35 : 6{,}76 \approx 2{,}715.$$

Как видим, второе приближение имеет две верные цифры; значит, третье, вероятно, будет иметь 4 верные цифры.

4) В качестве третьего приближения берем среднее арифметическое $(2{,}715+2{,}600+2{,}600):3=2{,}638$.

Контроль (который мы опускаем) показал бы, что здесь все четыре цифры верны:

$$\sqrt[3]{1835\cdot 10}\approx 26{,}38.$$

§ 45. Средние величины

Если дан ряд величин, то всякая величина, заключенная между наименьшей и наибольшей из данных величин, называется «средней». Из средних величин наиболее употребительны *средняя арифметическая* и *средняя геометрическая*.

Средняя арифметическая (или *среднее арифметическое*) получается от сложения данных величин и деления суммы на число этих величин:

$$\text{ср. ар.}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

(a_1, a_2,..., a_n — данные величины, n — их число).

Пример. Даны числа 83, 87, 81, 90.

$$\text{ср. ар.}=\frac{83+87+81+90}{4}=85\frac{1}{4}.$$

Среднее геометрическое получается от перемножения данных величин и извлечения из произведения корня, показатель которого равен числу величин:

$$\text{ср. геом.}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

(a_1, a_2,..., a_n — данные величины, n — их число).

Пример. Даны числа 40, 50, 82.

$$\text{ср. геом.}=\sqrt[3]{40\cdot 50\cdot 82}=\sqrt[3]{164\,000}\approx 54{,}74.$$

Среднее геометрическое всегда меньше среднего арифметического, кроме того случая, когда все взятые числа равны. Тогда ср. ар. равно ср. геом. Когда различия между взятыми числами составляют малые доли самих чисел, то и разность между ср. ар. и ср. геом. мала в сравнении с ними.

Вычисление ср. ар. имеет большое значение во всех областях практики.

Пример 1. Измеряется расстояние между двумя пунктами с помощью 10-метровой рулетки с сантиметровыми делениями. Сделано 10 промеров. Результаты их (в метрах): 62,36; 62,30; 62,32; 62,31; 62,36; 62,35; 62,33; 62,32; 62,38; 62,37. Различие результатов объясняется случайными неточностями измерений. Тогда вычисляют среднюю арифметическую:

$$\text{ср. ар.} = (62{,}36 + 62{,}30 + 62{,}32 + 62{,}31 + 62{,}36 + 62{,}35 + \\ + 62{,}33 + 62{,}32 + 62{,}38 + 62{,}37) : 10 = 62{,}34.$$

Это число представляет более надежную величину измеряемого расстояния, чем числа, полученные при измерении, потому что случайные ошибки почти всегда компенсируются при вычислении среднего (см. *ниже* § 47).

Пример 2. У тысячи взрослых людей измерен рост. Найдена ср. ар. Это — так называемый «средний рост». Он не выражает, вообще говоря, роста определенного человека. Но если измерить рост большого числа других людей и снова вычислить ср. ар., то средний рост окажется почти таким же. Разумеется, теоретически возможны случаи, когда в группе из 1000 лиц будут преобладать великаны или карлики. Но из числа всех мыслимых случаев эти исключительные случаи составляют, как показывают вычисления, ничтожнейший процент. Поэтому *практически* безошибочно можно считать, что в любой группе из 1000 человек средний рост будет почти одинаковым. Средние арифметические, найденные из массовых измерений, называются *статистическими средними*. Статистические средние имеют большое практическое значение. Например, зная средний удой коровы определенной породы при определенных условиях ее питания и т. д., можно вычислить удой стада, помножая средний удой на число коров в стаде.

§ 46. Сокращенное вычисление среднего арифметического

Числа, берущиеся для вычисления ср. ар., обычно мало отличаются друг от друга. Тогда вычисление ср. ар. можно очень облегчить с помощью следующего приема:

1) Выбираем произвольно какое-нибудь число, близкое к данным числам. Если данные числа разнятся друг от друга только в последней цифре, то в выбираемом числе предпочтительно взять за последнюю цифру 0; если данные числа разнятся друг от друга в двух последних цифрах, удобно взять число с двумя нулями на конце и т. д.

2) Вычитаем это число по очереди изо всех данных чисел [1]).

3) Берем ср. ар. найденных разностей.

4) Прибавляем ср. ар. к взятому числу.

Пример. Найти ср. ар. десяти чисел: 62,36; 62,30; 62,32; 62,31; 62,36; 62,35; 62,33; 62,32; 62,38; 62,37 (ср. пример предыдущего параграфа). 1) Выбираем число 62,30. 2) Вычитаем 62,30 из данных чисел; находим разности (в сотых долях) 6; 0; 2; 1; 6; 5; 3; 2; 8; 7. 3) Берем ср. ар. разностей; получаем 4 (сотых). 4) Прибавляем 0,04 к 62,30. Получаем 62,34. Это — искомое ср. ар.

§ 47. Точность среднего арифметического

Если ср. ар. получено из сравнительно небольшого ряда данных измерения (например, из 10, как в примере 1 § 45), то не исключена возможность, что истинная величина несколько отклоняется от вычисленной средней. Тогда важно знать, как велико может быть это отклонение; речь идет не о теоретически мыслимом отклонении (оно может быть как угодно велико), а о практически возможном (ср. пример 2 § 45). Величина последнего зависит от величины *среднего квадратичного отклонения*.

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из ср. ар. всех квадратов разностей между данными числами и их ср. ар. Ср. кв. отклонение принято обозначать греческой буквой σ (сигма):

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (a_2 - a)^2 + \ldots + (a_n - a)^2}{n}}, \qquad (A)$$

где $a = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$ (здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа, n — их число, a — их ср. ар., σ — ср. кв. отклонение).

Замечание. В формуле (A) любую из разностей можно заменить ей обратной; это дает возможность не вводить в вычисление отрицательных чисел [2]). Именно, когда одно из данных чисел меньше, чем ср. ар., то мы берем его за вычитаемое, а ср. ар. за уменьшаемое.

---

1) При этом могут получаться положительные и отрицательные числа (об отрицательных числах см. III, 3). Если хотят этого избежать, нужно взять число, меньшее всех данных чисел. Но вычисления будут несколько легче, если взять какое-нибудь среднее между данными числами.

2) Об отрицательных числах см. III, 3.

Пример. Вычислим ср. кв. отклонение для чисел предыдущего параграфа. Там мы нашли их ср. ар. 62,34. Разности между данными числами 62,36; 62,30 и т. д. и их ср. ар. будут (в единицах сотых долей): 2; 4; 2; 3; 2; 1; 1; 2; 4; 3. Квадраты этих разностей 4; 16; 4; 9; 4; 1; 1; 4; 16; 9. Ср. ар. квадратов разностей

$$\frac{4+16+4+9+4+1+1+4+16+9}{10}=6{,}8$$

(сотых долей). Квадратный корень из этого числа $\sqrt{6{,}8}\approx 3$ (сотых долей); $\sigma = 0{,}03$.

Если число измерений примерно равно 10, то истинное значение величины может отличаться от ср. ар. не более чем на величину ср. кв. отклонения σ. Точнее говоря, отклонения, большие чем σ, возможны лишь в исключительных случаях, число которых составляет около полупроцента всех возможных случаев. В рассмотренном примере истинная величина практически не может отклониться от числа 62,34 больше, чем на 0,03. Поэтому она заключена в пределах между $62{,}34 - 0{,}03 = 62{,}31$ и $62{,}34 + 0{,}03 = 62{,}37$.

Если число измерений значительно больше десяти, то максимальное практически возможное отклонение истинной величины от ср. ар. будет меньше чем σ. Именно отклонение не превысит величины $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ (n — число измерений). Так, когда число измерений примерно равно 1000, практически возможны лишь отклонения, не превышающие $0{,}1\sigma$.

§ 48. Отношение и пропорция

Частное от деления одного числа на другое называется также их *отношением*. Термин «отношение» применялся прежде только в тех случаях, когда требовалось выразить одну величину в долях другой, однородной с первой, например одну длину в долях другой, одну площадь в долях другой площади и т. д., что выполняется с помощью деления (см. II, 24). Отсюда понятно, почему появился особый термин «отношение»: раньше его смысл был иной, чем термина «деление», который относили к делению некоторой именованной величины на отвлеченное число. Сейчас этого различия не делают; говорят, например, об отношении неоднородных величин, скажем веса тела к его объему и т. д. Когда речь идет об отношении однородных величин, его часто выражают в процентах.

Пример. В библиотеке 10 000 книг; из них 8000 на русском языке; каково отношение числа русских книг к общему их числу? $8000:10\,000=0{,}8$. Искомое отношение есть 0,8 или 80%.

Делимое называют *предыдущим членом отношения*, делитель — *последующим*. В нашем примере 8000 — предыдущий член, 10 000 — последующий.

Два равных отношения образуют пропорцию. Так, если в одной библиотеке 10 000 книг, из них 8000 на русском языке, в другой библиотеке — 12 000 книг, из них 9600 на русском языке, то отношение числа русских книг к общему числу книг в обеих библиотеках одинаково: $8000:10\,000=0{,}8$; $9600:12\,000=0{,}8$. Мы имеем здесь пропорцию, которая записывается так: $8000:10\,000=9600:12\,000$. Говорят: «8000 относится к 10 000 так, как 9600 к 12 000». 8000 и 12 000 — *крайние члены*; 10 000 и 9600 — *средние члены пропорции.*

Произведение средних членов пропорции равно произведению крайних. В нашем примере $8000\cdot 12\,000=96\,000\,000$; $10\,000\cdot 9600=96\,000\,000$. Один из крайних членов пропорции равен произведению средних членов, деленному на другой крайний. Точно так же один из средних членов равен произведению крайних, деленному *на другой средний*. Если

$$a:b=c:d,$$

то

$$a=\frac{bc}{d};\quad b=\frac{ad}{c}$$

и т. д. Так, в нашем примере

$$8000=\frac{10\,000\cdot 9600}{12\,000}.$$

Этим свойством постоянно пользуются для вычисления неизвестного члена пропорции, когда три остальных члена известны.

Пример. $12:x=6:5$ (x обозначает неизвестное число) $x=\frac{12\cdot 5}{6}=10$.

Практические применения пропорций см. II, 50.

Пропорция, в которой средние члены равны, называется *непрерывной*; например, $18:6=6:2$. *Сред-*

ний член непрерывной пропорции есть среднее геометрическое (см. II, 45) *крайних членов*; в нашем примере $6=\sqrt{18\cdot 2}$.

§ 49. Пропорциональность

Значения двух различных величин могут взаимно зависеть друг от друга. Так, площадь квадрата зависит от длины его стороны, и обратно, длина стороны квадрата зависит от его площади.

Две взаимно зависимые величины называются пропорциональными, если отношение их значений остается неизменным.

Пример. Вес керосина пропорционален его объему; 2 *л* керосина весят 1,6 *кг*, 5 *л* весят 4 *кг*, 7 *л* весят 5,6 *кг*. Отношение веса к объему будет $\frac{1,6}{2}=0,8$; $\frac{4}{5}=0,8$; $\frac{5,6}{7}=$ $=0,8$ и т. д.

Неизменное отношение пропорциональных величин называется *коэффициентом пропорциональности*; коэффициент пропорциональности показывает, сколько единиц одной величины приходится на единицу другой; в нашем примере — сколько *кг* весит 1 *л* керосина (удельный вес керосина).

Если две величины пропорциональны, то любая пара значений одной величины образует пропорцию с парой соответствующих значений другой, взятых в том же порядке. В нашем примере $1,6:4=2:5$; $1,6:5,6=2:7$ и т. д. В соответствии с этим вместо вышеприведенного определения пропорциональности можно дать такое: *две величины, зависящие друг от друга так, что при увеличении одной из них другая увеличивается в том же отношении, называются пропорциональными.*

Две величины, зависящие друг от друга так, что при увеличении одной другая в том же отношении уменьшается, называются обратно пропорциональными. Например, время пробега поезда между двумя станциями обратно пропорционально скорости поезда. При скорости 50 *км/час* поезд проходит расстояние между Москвой и Ленинградом в 13 час.; при скорости 65 *км/час* — в 10 час., т. е. когда скорость увеличивается в отношении $\frac{65}{50}=\frac{13}{10}$, продолжительность пробега уменьшается в том же отношении: $\frac{13}{10}$.

Если две величины обратно пропорциональны, то любая пара значений одной величины образует пропорцию с парой соответствующих значений другой, взятых в обратном порядке. В нашем примере $65:50=13:10$.

Для двух обратно пропорциональных величин остается неизменным произведение их значений. В нашем примере $50 \cdot 13=650$; $65 \cdot 10=650$ (650 *км* — расстояние между Москвой и Ленинградом).

§ 50. Практические применения пропорций. Интерполяция

Решение многих задач связано с рассмотрением пропорциональных величин; применение правил § 48 механизирует решение таких задач, сводя их к единой схеме, показанной ниже на примерах.

Пример 1. Суточное потребление топлива на заводе составляло до проведения рационализации 1,8 *т*; годовой расход на топливо составлял 3000 руб. После проведения рационализации суточное потребление снизилось до 1,5 *т*. Какую сумму расходов на топливо нужно запланировать на год?

Безыскусственное решение задачи таково: находим 1) годовое потребление топлива до рационализации: $1{,}8 \cdot 365=657$ (*т*); 2) стоимость 1 *т* топлива: $3000:657=4{,}57$ (руб.); 3) годовой расход на топливо после рационализации:

$$4{,}57 \cdot 1{,}5 \cdot 365=2500 \text{ (руб.)}.$$

Гораздо быстрее и легче решить задачу, учтя, что суточное потребление топлива и годовой расход на него — величины пропорциональные (что видно из того, что увеличение суточного потребления увеличивает в то же число раз годовой расход; см. § 49).

Схема решения:

1,8 *т* 3000 руб.;

1,5 *т* x руб.;

$$x:3000=1{,}5:1{,}8,$$

$$x=\frac{3000 \cdot 1{,}5}{1{,}8}=2500 \text{ (руб.)}.$$

Хотя пропорциональная зависимость встречается очень часто, все же огромное число зависимостей, с которыми приходится иметь дело в практике, не подчиняется закону пропорциональности. Тем более важно отметить, что даже для таких величин схема пропорционального расчета не теряет значения. Именно, если рассматривать изменения непропорциональных величин внутри некоторых *тесных* пределов, то эти изменения будут *практически* пропорциональны.

Поясним это примером. Сторона квадрата и его площадь не пропорциональны: например, стороне 2 *м* отвечает площадь 4 $м^2$; стороне 2,01 *м* — площадь $(2{,}01)^2 = 4{,}0401 \approx 4{,}040$ ($м^2$); стороне 2,02 — площадь $4{,}0804 \approx 4{,}080$ ($м^2$) и так далее. Отношение сторон (например, 2,01 : 1), как видим, не равно отношению соответствующих площадей (4,040 : 1). Но отношение *изменений стороны* во взятых нами пределах практически равно отношению *изменений площади.*

Действительно, когда сторона увеличивается с 2 *м* до 2,01 *м*, ее изменение составляет 0,01 *м*; когда она увеличится с 2 *м* до 2,02 *м*, изменение составляет 0,02 *м*. Отношение изменений 0,02 : 0,01 равно 2. Соответствующие изменения площади будут (с точностью до третьего знака) составлять: в первом случае 0,040; во втором 0,080. Отношение изменений 0,080 : 0,040 также равно 2. Таким образом, изменение длины пропорционально изменению площади, если величины последних брать с точностью до третьего десятичного знака. Если же брать четыре десятичных знака, то обнаружится небольшое отклонение от пропорциональности. Но можно добиться, чтобы и в четвертом знаке не было никакого отклонения от пропорциональности; для этого нужно рассматривать изменение стороны в еще более узких пределах (скажем, не от 1 *м* до 1,02 *м*, а от 1 *м* до 1,002 *м*). Практически мы всегда учитываем только определенное количество десятичных знаков (три, четыре, редко пять). Вот почему мы можем малые изменения стороны и площади квадрата считать величинами пропорциональными. То же явление имеет место в огромнейшем большинстве других случаев. Благодаря этому оказывается возможным по таблице, содержащей сравнительно небольшое число данных, находить и такие результаты, которых в таблице нет, как бы «читая между строк» в ней.

Пример 2. Возьмем таблицу квадратных корней (стр. 14 — 17). Пусть мы желаем найти $\sqrt{63{,}2}$; в таблице нет числа 63,2, но есть 63; 64; 65 и так далее.

Подкоренное число	Квадратный корень	Изменение квадратного корня
63 64 65	7,937 8,000 8,062	0,063 0,062

Подсчитаем (см. трётью колонку), насколько изменяется величина корня при изменении подкоренного числа на 1 от 63 до 64 и от 64 до 65. Мы увидим, что различие в этих изменениях будет только на одну единицу третьего знака. (На самом деле это различие еще меньше: оно сказывается только в четвертом знаке, и лишь округление до трех знаков вызвало это различие.)

Если же брать только три знака, то все наши изменения окажутся почти равными, т. е. в пределах между 63 и 65 изменения квадратных корней, взятые с точностью до трех десятичных знаков, пропорциональны изменениям подкоренных чисел. Поэтому мы находим $\sqrt{63,2}$ по такой схеме:

Изменение подкоренного числа	Изменение квадратного корня
1	0,062
0,2	x

$$x : 0,062 = 0,2 : 1,$$

$$x = \frac{0,062 \cdot 0,2}{1} = 0,012.$$

Теперь находим $\sqrt{63,2}$, прибавляя к $\sqrt{63} \approx 7,937$ найденное число 0,012. Получаем:

$$\sqrt{63,2} \approx 7,949.$$

Если извлечем этот корень с точностью до третьего десятичного знака, то убедимся, что все знаки нашего результата правильны.

Описанный выше способ вычисления носит название *интерполяции* (или интерполирования). Латинское слово «интерполяция» в переводе означает «вставка внутрь». В математике интерполяцией называется всякий способ, с помощью которого по таблице, содержащей некоторые числовые данные, можно найти промежуточные результаты, которые непосредственно не даны в таблице. Рассмотренный нами простейший способ интерполяции называется *линейной интерполяцией*.

Интерполяция широко применяется при пользовании таблицами самого разнообразного содержания.

III. АЛГЕБРА

§ 1. Предмет алгебры

Предметом алгебры является изучение *уравнений* (III, 15 — 17) и ряда вопросов, которые развились из теории уравнений. В настоящее время, когда математика разделилась на ряд специальных областей, к области алгебры относят лишь уравнения определенного типа, так называемые *алгебраические уравнения*[1]) (III, 19). О происхождении названия «алгебра» см. § 2.

§ 2. Исторические сведения о развитии алгебры

Вавилон. Истоки алгебры восходят к глубокой древности. Уже около 4000 лет назад вавилонские ученые владели решением квадратного уравнения (III, 29) и решали системы двух уравнений, из которых одно — второй степени (III, 33). С помощью таких уравнений решались разнообразные задачи землемерия, строительного искусства и военного дела.

Буквенные обозначения, применяемые нами в алгебре, не употреблялись вавилонянами; уравнения записывались в словесной форме.

Греция. Первые сокращенные обозначения для неизвестных величин встречаются у древнегреческого математика Диофанта (2—3 в. н. э.). Неизвестное Диофант именует «аритмо́с» (число), вторую степень неизвестного — «ду́намис»

---

[1]) Следует заметить, что в школьный курс алгебры принято включать и такие вопросы, которые к учению об уравнениях имеют лишь весьма отдаленное отношение. Таковы, например, теория прогрессий и логарифмические вычисления, которые по существу принадлежат скорее арифметике, чем алгебре; включение их в курс алгебры оправдывается педагогическими соображениями.

(это слово имеет много значений: сила, могущество, имущество, степень и др. [1])). Третью степень Диофант называет «кюбос» (куб), четвертую — «дюнамодюнамис», пятую — «дюнамокюбос», шестую — «кюбокюбос». Эти величины он обозначает первыми буквами соответствующих наименований (*ар, дю, кю, ддю, дкю, ккю*). Известные числа для отличия от неизвестных сопровождаются обозначением «*мо*» (монас — единица). Сложение не обозначается совсем, для вычитания имеется сокращенное обозначение, равенство обозначается «ис» (йсос — равный).

Ни вавилоняне, ни греки не рассматривали отрицательных чисел. Уравнение 3 *ар* 6 *мо ис* 2 *ар* 1 *мо* ($3x+6=$ $=2x+1$) Диофант называет «неуместным». Перенося члены из одной части уравнения в другую, Диофант говорит, что слагаемое становится вычитаемым, а вычитаемое — слагаемым.

Китай. За 2000 лет до нашего времени китайские ученые решали уравнения первой степени и их системы, а также квадратные уравнения. Им были знакомы отрицательные и иррациональные числа. Так как в китайском письме каждый знак изображает некоторое понятие, то в китайской алгебре не могло быть «сокращенных» обозначений.

В последующие эпохи китайская математика обогатилась новыми достижениями. Так, в конце 13 века китайцы знали закон образования биномиальных коэффициентов, известный ныне под именем «треугольника Паскаля» (см. стр. 255). В Западной Европе этот закон был открыт (Штифелем) на 250 лет позднее.

Индия. Индийские ученые широко применяли сокращенные обозначения неизвестных величин и их степеней. Эти обозначения являются начальными буквами соответствующих наименований (неизвестное называлось «столько-то»; для отличия второго, третьего и т. д. неизвестного употреблялись наименования цветов: «черное», «голубое», «желтое» и т. д.). Индийские авторы широко употребляли иррациональные [2]) и отрицательные числа. Вместе с отрицательными числами в числовую семью вошел нуль, который прежде обозначал лишь отсутствие числа.

[1]) На арабский язык термин «дюнамис» был переведен словом «маль», обозначающим «имущество». Западноевропейские математики в 12 веке перевели термин «маль» на латинский язык равнозначным словом census. Термин «квадрат» вошел в употребление лишь в 16 веке.

[2]) Греческие математики умели находить приближенные значения корней, но в алгебре старались избегать иррациональностей.

Страны арабского языка. Узбекистан. Таджикистан. У индийских авторов алгебраические вопросы излагались в астрономических сочинениях; самостоятельной дисциплиной алгебра становится у ученых, писавших на международном языке мусульманского мира — арабском. Основоположником алгебры, как особой науки, нужно считать среднеазиатского ученого Мухаммеда из Хорезма, известного под арабским прозвищем аль-Хваризми (Хорезмиец). Его алгебраический труд, составленный в 9 в. н. э., носит название «Книга восстановления и противопоставления». «Восстановлением» Мухаммед называет перенос вычитаемого из одной части уравнения в другую, где оно становится слагаемым; «противопоставлением» — собирание неизвестных в одну сторону уравнения, а известных — в другую сторону. По-арабски «восстановление» называется «ал-джебр» Отсюда название «алгебра».

У Мухаммеда Хорезмского и у последующих авторов алгебра широко применяется к купеческим и иным денежным расчетам. Ни он, ни другие математики, писавшие по-арабски, не употребляли никаких сокращенных обозначений [1]). Они не признавали и отрицательных чисел: учение об отрицательных числах, знакомое им из индийских источников, они считали плохо обоснованным. Это было справедливо, но зато индийские ученые могли ограничиться одним случаем полного квадратного уравнения, тогда как Мухаммед Хорезмский и его преемники должны были различать три случая ($x^2+px=q$, $x^2+q=px$, $x^2=px+q$; p и q — положительные числа).

Узбекские, таджикские, персидские и арабские математики обогатили алгебру рядом новых достижений. Для уравнений высших степеней они умели находить приближенные значения корней с очень большой точностью. Так, знаменитый среднеазиатский философ, астроном и математик аль-Бируни (973 — 1048), родом тоже из Хорезма, свел задачу о вычислении стороны правильного 9-угольника, вписанного в данную окружность, к кубическому уравнению $x^3=1+3x$ и нашел (в 60-ричных дробях) приближенное значение $x=1{,}52'45''47'''13''''$ [2]) (с точностью до $\frac{1}{60^4}$; в деся-

[1]) В них не было и нужды, ибо арабское письмо очень кратко: гласные не обозначаются, согласные и полугласные буквы просты по начертанию и сливаются по нескольку в один знак. Для написания многих слов требуется не больше времени, чем для написания некоторых наших букв (например, ж, щ). Зато арабская грамота много труднее нашей.

[2]) Т. е. одна целая, 52 шестидесятых, 45 три тысячи шестисотых и т. д.

тичных дробях это дает семь верных десятичных знаков). Классик иранской и таджикской поэзии, выдающийся ученый Омар аль-Хайам (1036 — 1123) из Нишапура подверг систематическому изучению уравнения третьей степени. Ни ему, ни другим математикам мусульманского мира не удалось найти выражения корней кубического уравнения через коэффициенты. Но аль-Хайам разработал способ, по которому можно (геометрически) найти число действительных корней кубического уравнения (его самого интересовали только положительные корни).

Средневековая Европа. В 12 веке «Алгебра» аль-Хваризми стала известна в Европе и была переведена на латинский язык. С этого времени начинается развитие алгебры в европейских странах (сперва под сильным влиянием науки восточных народов). Появляются сокращенные обозначения неизвестных, решается ряд новых задач, связанных с потребностями торговли. Но существенного сдвига не было до 16 века. В первой трети 16 века итальянцы дель-Ферро и Тарталья нашли правила для решения кубических уравнений вида $x^3 = px + q$; $x^3 + px = q$; $x^3 + q = px$, а Кардано в 1545 г. показал, что всякое кубическое уравнение сводится к одному из этих трех; в это же время Феррари, ученик Кардано, нашел решение уравнения 4-й степени.

Сложность правил для решения этих уравнений сделала необходимым усовершенствование обозначений. Это совершалось постепенно в течение целого столетия. В конце 16 века французский математик Виета ввел буквенные обозначения, и притом не только для неизвестных, но и для известных величин (неизвестные обозначались заглавными гласными буквами, известные — заглавными согласными). Были введены сокращенные обозначения действий; у разных авторов они имели разный вид. В середине 17 века алгебраическая символика благодаря французскому ученому Декарту (1596 — 1650) приобретает вид, очень близкий к нынешней.

Отрицательные числа. В 13 — 16 веках отрицательные числа рассматриваются европейцами лишь в исключительных случаях. После открытия решения кубического уравнения отрицательные числа постепенно завоевывают право гражданства в алгебре, хотя их и называют «ложными». В 1629 г. Жирар (Франция) дал общеизвестный ныне способ геометрического изображения отрицательных чисел. Лет двадцать спустя отрицательные числа получили всеобщее распространение.

Комплексные числа. Введение комплексных чисел (III, 28 и III, 34) также было связано с открытием решения кубического уравнения.

И до этого открытия при решении квадратного уравнения $x^2+q=px$ приходилось сталкиваться со случаем, когда требовалось извлечь квадратный корень из $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$, где величина $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ была меньше чем q. Но в таком случае заключали, что уравнение не имеет решений. О введении новых (комплексных) чисел в это время (когда даже отрицательные числа считались «ложными») не могло быть и мысли. Но при решении кубического уравнения по правилу Тартальи оказалось, что без действий над мнимыми числами нельзя получить *действительный* корень.

Объясним это подробнее. По правилу Тартальи корень уравнения

$$x^3=px+q \tag{1}$$

представляется выражением

$$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}, \tag{2}$$

где u и v — решения системы

$$u+v=q; \quad uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{3}$$

Например, для уравнения $x^3=9x+28$ ($p=9$; $q=28$) имеем:

$$u+v=28; \quad uv=27,$$

откуда находим, что либо $u=27$; $v=1$, либо $u=1$; $v=27$. В обоих случаях

$$x=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}=4.$$

Других действительных корней данное уравнение не имеет.

Но, как заметил уже Кардано, система (3) может не иметь действительных решений, между тем как уравнение (1) имеет действительный и притом *положительный* корень. Так, уравнение $x^3=15x+4$ имеет корень $x=4$, но система

$$u+v=4; \quad uv=125$$

имеет комплексные корни: $u=2+11i$, $v=2-11i$ (или $u=2-11i$, $v=2+11i$).

На это загадочное явление впервые пролил свет Бомбелли в 1572 г. Он указал, что $2+11i$ есть куб числа $2+i$, а $2-11i$ — куб числа $2-i$; значит, можно написать $\sqrt[3]{2+11i}=2+i$; $\sqrt[3]{2-11i}=2-i$, и тогда формула (2) дает $x=(2+i)+(2-i)=4$.

С этого момента нельзя было игнорировать комплексные числа. Но теория комплексных чисел развивалась медленно: еще в 18 веке крупнейшие математики мира спорили о том, как находить логарифмы комплексных чисел. Хотя с помощью комплексных чисел удалось получить много важных фактов, относящихся к действительным числам, но самое существование комплексных чисел многим казалось сомнительным. Исчерпывающие правила действий с комплексными числами дал в середине 18 века русский академик Эйлер — один из величайших математиков всех времен и народов. На рубеже 18 и 19 веков было указано Весселем (Дания) и Арганом (Франция) [1]) геометрическое изображение комплексных чисел (III, 40). Но на работы Весселя и Аргана не обратили внимания, и лишь в 1831 г., когда тот же способ был развит великим математиком Гауссом (Германия), он стал всеобщим достоянием.

Вслед за тем, как были решены уравнения 3-й и 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени. Но Руффини (Италия) на рубеже 18 и 19 веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ *нельзя* решить алгебраически; точнее: нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) [2]).

В 1830 г. Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически.

Тем не менее всякое уравнение n-й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней (среди которых могут быть и равные). В этом математики были убеждены еще в 17 веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже 18 и 19 веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

---

[1]) Первые шаги в этом направлении были сделаны Валлисом (Англия) в 1685 г.

[2]) В доказательстве Руффини были некоторые недочеты. В 1824 г. Абель (Норвегия) дал безупречное доказательство.

Вопросы, которыми занимались алгебраисты 19 и 20 веков, по большей части выходят за пределы элементарной математики. Поэтому укажем только, что в 19 веке были разработаны многие методы приближенного решения уравнений. В этом направлении важные результаты были получены великим русским математиком Н. И. Лобачевским

§ 3. Отрицательные числа

На самых ранних ступенях развития люди знали только натуральные числа (II, 2). Но этими числами нельзя обойтись даже в самых простых случаях жизни. Действительно, одно натуральное число невозможно в общем случае разделить на другое, если пользоваться только натуральными числами. Между тем в жизни нужно бывает делить, скажем, 3 на 4, 5 на 12 и так далее. Без введения дробных чисел деление натуральных чисел есть невозможное действие; введение дробей делает это действие возможным.

Но действие вычитания и после введения дробей остается не всегда возможным: нельзя вычесть большее число из меньшего, например 5 из 3. Однако в повседневной жизни и не представляется необходимым производить подобное вычитание, и потому очень долгое время оно считалось не только невозможным, но и совершенно бессмысленным.

Развитие алгебры показало, что такое действие необходимо ввести в математику (см. ниже, § 4), и оно было узаконено индийскими учеными примерно в 7 в. н. э., а китайскими еще раньше. Индийские ученые, стараясь найти и в жизни образцы такого вычитания, пришли к толкованию его с точки зрения торговых расчетов. Если купец имеет 5000 руб. и закупает товара на 3000 руб., у него остается $5000-3000=2000$ руб. Если же он имеет 3000 руб., а закупает на 5000 руб., то он остается в долгу на 2000 руб. В соответствии с этим считали, что здесь совершается вычитание 3000—5000, результатом же является число $\dot{2}000$ (2000 с точкой наверху), означающее «две тысячи долга».

Толкование это носило искусственный характер, купец никогда не находил сумму долга вычитанием 3000—5000, а всегда выполнял вычитание 5000—3000. Кроме того, на этой основе можно было с натяжкой объяснить лишь правила сложения и вычитания «чисел с точками», но никак нельзя было объяснить правила умножения или деления (о правилах действий см. ниже, § 5). Все же толкование это долго приводилось в учебниках и в некоторых книгах приводится и поныне.

«Невозможность» вычитания большего числа из меньшего обусловливается тем, что натуральный ряд чисел бесконечен *только в одну сторону*. Если последовательно вычитать 1, начиная, скажем, из числа 7, мы получим числа

$$6, 5, 4, 3, 2, 1,$$

дальнейшее вычитание дает уже «отсутствие числа», а дальше не из чего уже вычитать. Если же мы хотим сделать вычитание всегда возможным, мы должны: 1) «отсутствие числа» считать также числом (нуль); 2) от этого последнего числа считать возможным отнять еще единицу и т. д.

Так мы получаем новые числа, обозначаемые в настоящее время так:

$$-1, \quad -2, \quad -3 \quad \text{и т. д.}$$

Эти числа называются *целыми отрицательными числами*. *Стоящий впереди знак «минус» напоминает о происхождении* отрицательного числа из последовательного вычитания единицы. Знак этот называется «знаком количества» в отличие от знака вычитания, имеющего ту же форму; последний называется «знаком действий».

Введение целых отрицательных чисел влечет за собой введение и *дробных отрицательных чисел*. Если мы принимаем, что $0-5=-5$, то должны принять также, что $0-\frac{12}{7}=-\frac{12}{7}$. Число $-\frac{12}{7}$ есть дробное отрицательное число.

В противоположность отрицательным числам (целым и дробным) те числа (целые и дробные), которые рассматриваются в арифметике, называются *положительными*. Чтобы еще более оттенить эту противоположность, положительные числа снабжаются часто знаком «плюс», который в этом случае есть знак количества (а не знак действия). Например, число 2 записывают $+2$[1]).

Отрицательные и положительные числа, взятые вместе, в школьных руководствах именуют относительными числами. В принятой научной терминологии эти числа вместе с числом

---

[1]) Одинаковость вида знаков количества (+ и —) и знаков действий имеет ряд преимуществ для вычислительных целей, но на первых порах причиняет учащимся ряд трудностей. Поэтому в начальном преподавании полезно различать знак действия от знака количества, например писать отрицательную двойку не в виде -2, а в виде $\bar{2}$, как это и делается всегда в логарифмических вычислениях (см. III, 65 и след.).

нуль называют *рациональными.* Смысл этого названия выясняется при введении понятия иррационального числа (см. III, 27). Подобно тому как до введения отрицательного числа нет никаких положительных чисел и число $\frac{3}{4}$ есть просто дробное число, а не положительное дробное число, так и до введения иррационального чисда числа $+5$, -5, $-\frac{3}{4}$, $+\frac{3}{4}$ и т. д. просто суть положительные и отрицательные целые и дробные числа, а не рациональные числа.

§ 4. Происхождение отрицательных чисел и правил действий над ними

Едва ли не самым темным для учащихся местом в алгебре является учение о действиях с отрицательными числами. И это не потому, что устанавливаемые правила действий сложны. Напротив, они очень просты. Но темными остаются два вопроса: 1) Зачем вводятся отрицательные числа? 2) Почему над ними совершаются действия по таким-то правилам, а не по иным? В частности, очень плохо понимается, почему при умножении и делении отрицательного числа на отрицательное результат есть положительное число.

Все эти вопросы возникают потому, что с отрицательными числами учащихся обычно знакомят до того, как они начали решать уравнения, и больше не возвращаются к правилам действий с отрицательными числами. Между тем лишь в связи с решением уравнений выясняется ответ на оба поставленных выше вопроса. Исторически отрицательные числа возникли именно в этой связи. Не будь уравнений, не было бы нужды и в отрицательных числах.

Долгое время уравнения изучались без помощи отрицательных чисел; при этом возникали многие неудобства; для устранения этих неудобств и были введены отрицательные числа. При этом в течение долгого времени многие выдающиеся математики отказывались вводить их в употребление или вводили с большой неохотой. Еще Декарт (1596—1650) называл отрицательные числа «ложными числами».

О характере упомянутых неудобств дает представление такой простой пример. При решении уравнения первой степени с одним неизвестным, например уравнения

$$7x-5=10x-11,$$

мы переносим члены так, чтобы в одной части уравнения оказались известные, в другой — неизвестные величины. При этом знаки меняются на обратные. Собирая неизвестные в правую часть, а известные в левую, получаем:

$$11-5=10x-7x; \quad 6=3x; \quad x=2.$$

Эти преобразования можно выполнять, совершенно не пользуясь отрицательными числами и рассматривая знаки + и — как знаки сложения и вычитания, а не как знаки положительных и отрицательных чисел. Но тогда нужно заранее продумать вопрос, в какую сторону, вправо или влево, следует переносить неизвестные члены. Если, например, в вышеприведенном уравнении перенести неизвестные члены *влево*, получим:

$$7x-10x=5-11.$$

Не вводя отрицательных чисел, мы не можем из 5 вычесть 11, не можем из $7x$ вычесть $10x$ и, значит, не можем дальше продвинуться в решении уравнения. Между тем заранее не всегда видно (особенно если членов много), в какую сторону нужно переносить неизвестные члены, чтобы такого положения не создавалось. Вычислитель должен быть готов проделать двойную работу, вторично совершая перенос членов в нужную сторону. В порядке рационализации вычислительного процесса и были введены отрицательные числа. Действительно, если мы согласимся считать «возможным» «невозможное» вычитание $5-11$, обозначив результат через -6, и точно так же вычитание $7x-10x$, обозначив результат $-3x$, то получим:

$$-3x=-6.$$

Определяя x, находим, что

$$x=-6:-3.$$

Теперь выясняется, что, введя отрицательные числа, мы должны установить правило, что при делении отрицательного числа (-6) на отрицательное (-3) частное есть положительное число (2). Действительно, это частное должно дать значение неизвестной величины x, которое раньше было найдено другим путем (без отрицательных чисел) и оказалось равным 2.

Таким примерно образом и были введены отрицательные числа; цель этого введения — рационализация вычислительного процесса; правила действий над отрицательными числами явились результатом внедрения этого рационализаторского приема в вычислительную практику.

Многолетние и многообразные испытания показали, что этот прием обладает огромной эффективностью и находит себе блестящие применения во всех областях науки и техники. Всюду введение отрицательных чисел позволяет охватить единым правилом такие явления, для которых нужно было бы выдумывать десятки правил, если ограничиться числами положительными.

Итак, на два вышепоставленных вопроса нужно ответить следующим образом: 1) отрицательные числа вводятся затем, чтобы устранить ряд трудностей, возникших прежде всего при решении уравнений; 2) правила действий над ними вытекают из необходимости согласовать результаты, полученные с помощью отрицательных чисел, с теми результатами, которые могли бы быть получены и без них.

Все эти правила (см. § 5) могут быть установлены при рассмотрении простейших уравнений подобно тому, как выше было выведено правило деления отрицательного числа на отрицательное.

§ 5. Правила действий с отрицательными и положительными числами

Абсолютной величиной (или абсолютным значением) отрицательного числа называется положительное число, получаемое от перемены его знака (—) на обратный (+). Абсолютная величина -5 есть $+5$, т. е. 5. Абсолютной величиной положительного числа (а также числа 0) называется само это число.

Знак абсолютной величины — две прямые черты, в которые заключается число, абсолютная величина которого берется. Например, $|-5|=5$, $|+5|=5$, $|0|=0$.

1. Сложение. а) *При сложении двух чисел с одинаковым знаком складываются их абсолютные величины и перед суммой ставится общий их знак.*

Примеры.

$$(+8)+(+11)=19;$$
$$(-7)+(-3)=-10.$$

б) *При сложении двух чисел с разными знаками из абсолютной величины одного из них вычитается абсолютная величина другого (меньшая из большей) и ставится знак того числа, у которого абсолютная величина больше.*

Примеры.

$$(-3)+(+12)=9;$$
$$(-3)+(+1)=-2.$$

2. Вычитание. Вычитание одного числа из другого *можно заменить сложением*; при этом уменьшаемое берется со своим знаком, а вычитаемое с обратным.

Примеры.

$$(+7)-(+4)=(+7)+(-4)=3;$$
$$(+7)-(-4)=(+7)+(+4)=11;$$
$$(-7)-(-4)=(-7)+(+4)=-3;$$
$$(-4)-(-4)=(-4)+(+4)=0.$$

Замечание. При выполнении сложения и вычитания, особенно когда имеем дело с несколькими числами, лучше всего поступать так: 1) освободить все числа от скобок, при этом перед числом поставить знак «+», если прежний знак перед скобкой был одинаков со знаком в скобке, и «—», если он был противоположен знаку в скобке; 2) сложить абсолютные величины всех чисел, имеющих теперь слева знак +; 3) сложить абсолютные величины всех чисел, имеющих теперь слева знак —; 4) из большей суммы вычесть меньшую и поставить знак, соответствующий большей сумме.

Пример. $(-30)-(-17)+(-6)-(+12)+(+2)$;
1) $(-30)-(-17)+(-6)-(+12)+(+2)=-30+17-6-12+2$; 2) $17+2=19$; 3) $30+6+12=48$; 4) $48-19=29$. Результат есть отрицательное число -29, так как бóльшая сумма (48) получилась от сложения абсолютных величин тех чисел, перед которыми стояли минусы в выражении $-30+17-6-12+2$.

На это последнее выражение можно смотреть и как на *сумму* чисел -30, $+17$, -6, -12, $+2$, и как на результат последовательного прибавления к числу -30 числа 17, затем вычитания числа 6, затем вычитания 12 и, наконец, прибавления 2. Вообще на выражение $a-b+c-d$ и т. д. можно смотреть и как на *сумму чисел* $(+a)$, $(-b)$, $(+c)$, $(-d)$, и как на результат таких последовательных действий: вычитания из $(+a)$ числа $(+b)$, прибавления $(+c)$, вычитания $(+d)$ и т. д.

3. Умножение. *При умножении двух чисел умножаются их абсолютные величины и перед произведением ставится знак плюс, если знаки сомножителей одинаковы, и минус, если они разные.*

Схема (правило знаков при умножении):

$$\boxed{\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}}$$

Примеры. $(+2{,}4) \cdot (-5) = -12$; $(-2{,}4) \cdot (-5) = 12$; $(-8{,}2) \cdot (+2) = -16{,}4$.

При перемножении нескольких сомножителей знак произведения положителен, если число отрицательных сомножителей четно, и отрицателен, если число отрицательных сомножителей нечетно.

Пример.

$$\left(+\frac{1}{3}\right) \cdot (+2) \cdot (-6) \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -14$$

(три отрицательных сомножителя);

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (+7) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = 7$$

(два отрицательных сомножителя).

4. Деление. *При делении одного числа на другое делят абсолютную величину первого на абсолютную величину второго и перед частным ставится знак плюс, если знаки делимого и делителя одинаковы, и минус, если они разные* (схема та же, что для умножения).

Примеры. $(-6) : (+3) = -2$;

$(+8) : (-2) = -4$; $(-12) : (-12) = +1$.

§ 6. Действия с одночленами; сложение и вычитание многочленов

Одночленом называется произведение двух или нескольких сомножителей, каждый из которых есть либо число, либо буква, либо степень буквы. Например, $2d$, a^3b, $3abc$, $-4x^2y^3$ — одночлены. Отдельно взятое число или отдельно взятая буква тоже может рассматриваться как одночлен.

Любой из сомножителей одночлена можно назвать его *коэффициентом*. Часто под коэффициентом понимают *числовой множитель* (например, в выражении $-4x^2yz^3$ число -4 есть коэффициент). Выделяя один из множителей в качестве коэффициента, хотят подчеркнуть, что одночлен получился в результате умножения всей остальной части на этот коэффициент. Выделяя числовой множитель в качестве коэффициента, мы подчеркиваем, что основную роль играет буквенное выражение, которое повторяется слагаемым некоторое число раз или дробится на доли.

Одночлены называются *подобными*, если они одинаковы или отличаются только коэффициентами. Отсюда видно, что два одночлена можно считать и подобными и неподобными, смотря по тому, что считается их коэффициентами. Если коэффициентами считать числовые множители, то подобными одночленами будут такие, у которых одинаковы буквенные части. Например, одночлены ax^2y^2, bx^2y^2, cx^2y^2 подобны, если считать коэффициентами a, b, c; одночлены $3x^2y^2$, $-5x^2y^2$, $6x^2y^2$ подобны, если считать коэффициентами числовые множители.

Сложение одночленов. Сложение двух или нескольких одночленов, вообще говоря, можно только обозначить; до того как вместо букв мы возьмем какие-нибудь числа, сумма одночленов, как правило, не приводится к более простому виду. Ее можно преобразовать к более простому виду лишь тогда, когда среди слагаемых имеются подобные; вместо этих членов напишется подобный им член, коэффициент которого равен сумме их коэффициентов. Эта замена называется *приведением подобных членов.*

Пример 1. $3x^2y^2-5x^2y^2+6x^2y^2=4x^2y^2$.

Пример 2. $ax^2y^2-bx^2y^2+cx^2y^2=(a-b+c)\,x^2y^2$.

Пример 3. $4x^3y^2-3x^2y^2-2x^3y^2+6x^2y^2+5xy=$ $=2x^3y^2+3x^2y^2+5xy$.

Вынесение за скобки. Действие, совершенное в примере 2, называется *вынесением за скобки;* говорят, что x^2y^2 «вынесено за скобки». По существу вынесение за скобки — то же самое, что приведение подобных членов.

Многочлен. *Сумма одночленов называется многочленом.* Сложение двух или нескольких многочленов есть не что иное, как образование нового многочлена, включающего в себя все члены всех взятых многочленов.

Вычитание многочленов есть не что иное, как прибавление многочлена, члены которого образованы из членов взятого многочлена переменой знака на обратный.

Пример. $(4a^2+2b-2x^2y^2)-(12a^2-c)+(7b-2x^2y^2)=$ $=\underline{4a^2}+\underline{\underline{2b}}-\underline{\underline{\underline{2x^2y^2}}}-\underline{12a^2}+c+\underline{\underline{7b}}-\underline{\underline{\underline{2x^2y^2}}}=-8a^2+$ $+9b-4x^2y^2+c$ (одинаковым числом черт снизу обозначены подобные члены).

Умножение одночленов. Умножение одночленов, вообще говоря, можно только обозначить (ср. сказанное выше о сложении одночленов). Произведение двух или нескольких одночленов можно упростить лишь в том случае, когда в них входят некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты; показатели степеней у соответствующих букв складываются; числовые коэффициенты перемножаются.

Пример. $5ax^2y^5(-3a^3x^4z) = -15a^4x^6y^5z$ [сложены показатели степени буквы a $(1+3=4)$ и буквы x $(2+4=6)$].

Деление одночленов. Деление одночлена на одночлен, вообще говоря, можно только обозначить. Частное двух одночленов можно упростить, если делимое и делитель содержат некоторые степени одних и тех же букв или числовые коэффициенты; показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого; числовой коэффициент делимого делится на числовой коэффициент делителя.

Пример. $12x^3y^4z^5 : 4x^2yz^2 = 3xy^3z^3$ [вычтены показатели степени буквы x $(3-2=1)$, буквы y $(4-1=3)$ и буквы z $(5-2=3)$].

Замечание 1. Если показатели степени у некоторой буквы в делимом и делителе одни и те же, то в частное эта буква не войдет (деленная сама на себя, она даст единицу). Произведя вычитание показателей степеней, мы получили бы 0. Поэтому мы должны принять, что *нулевая степень любого числа есть число* 1.

Пример. $4x^2y^3 : 2x^2y = 2x^0y^2 = 2y^2$ $(x^0 = 1)$.

Замечание 2. Если показатель степени какой-нибудь буквы в делимом меньше, чем показатель степени той же буквы в делителе, то вычитание дает отрицательную степень этой буквы. Подробнее об отрицательных степенях см. III, 61. Результат можно представить также в виде дроби; тогда можно обойтись без отрицательной степени.

Пример. $10x^2y^5 : 2x^6y^4 = 5x^{-4}y = \frac{5y}{x^4}$ $\left(x^{-4} = \frac{1}{x^4}\right)$.

§ 7. Умножение сумм и многочленов

Произведение суммы двух или нескольких выражений на какое-либо выражение равно сумме произведений каждого из слагаемых на взятое выражение:

$$(a + b + c)x = ax + bx + cx \quad \text{(открытие скобок)}.$$

Вместо букв a, b, c могут быть взяты любые выражения, в частности любые одночлены. Вместо буквы x можно также взять любое выражение; если это выражение само представляет сумму некоторых слагаемых, например $m+n$, то имеем:

$$(a+b+c)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)=$$
$$=am+an+bm+bn+cm+cn,$$

т. е. *произведение суммы на сумму равно сумме всех возможных произведений каждого члена одной суммы на каждый член другой суммы.*

В частности, это правило относится к произведению многочлена на многочлен:

$$(3x^2-2x+5)(4x+2)=12x^3-8x^2+20x+6x^2-4x+10=$$
$$=12x^3-2x^2+16x+10.$$

Запись умножения:

$$\begin{array}{r}
3x^2-2x+5\\
4x+2\\
\hline
12x^3-8x^2+20x\phantom{{}+10}\\
6x^2-4x+10\\
\hline
12x^3-2x^2+16x+10
\end{array}$$

§ 8. Формулы сокращенного умножения многочленов

Следующие частные случаи умножения многочленов часто встречаются, и потому их полезно помнить. Особенно важно научиться применять нижеприведенные формулы тогда, когда буквы a, b, входящие в них, заменяются более сложными выражениями (например, одночленами).

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. *Квадрат суммы двух величин равен квадрату первой плюс удвоенное произведение первой на вторую плюс квадрат второй.*

Пример 1. $104^2=(100+4)^2=$
$$=10\,000+800+16=10\,816.$$

Пример 2. $(2ma^2+0{,}1nb^2)^2=$
$$=4m^2a^4+0{,}4mna^2b^2+0{,}01n^2b^4.$$

Предостережение:

$$(a+b)^2 \text{ не равно } a^2+b^2.$$

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. *Квадрат разности двух величин равен квадрату первой минус удвоенное произведение первой на вторую плюс квадрат второй.* Эту

формулу можно рассматривать как частный случай предыдущей [вместо b берется $(-b)$].

Пример 1. $98^2=(100-2)^2=10\,000-400+4=9604$.

Пример 2. $(5x^3-2y^3)^2=25x^6-20x^3y^3+4y^6$.

Предостережение: $(a-b)^2$ *не равно* a^2-b^2 [см. формулу 3].

3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. *Произведение суммы двух величин на их разность равно разности их квадратов.*

Пример 1. $71\cdot 69=(70+1)(70-1)=70^2-1=4899$.

Пример 2. $(0{,}2a^2b+c^3)(0{,}2a^2b-c^3)=0{,}04a^4b^2-c^6$.

4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. *Куб суммы двух величин равен кубу первой плюс утроенное произведение квадрата первой на вторую плюс утроенное произведение первой на квадрат второй плюс куб второй.*

Пример 1. $12^3=(10+2)^3=$
$$=10^3+3\cdot 10^2\cdot 2+3\cdot 10\cdot 2^2+2^3=1728.$$

Пример 2. $(5ab^2+2a^3)^3=$
$$=125a^3b^6+150a^5b^4+60a^7b^2+8a^9.$$

Предостережение: $(a+b)^3$ *не равно* a^3+b^3 [см. формулу 6].

5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. *Куб разности двух величин равен кубу первой минус утроенное произведение квадрата первой на вторую плюс утроенное произведение первой на квадрат второй минус куб второй.*

Пример. $99^3=(100-1)^3=$
$$=1\,000\,000-3\cdot 10\,000\cdot 1+3\cdot 100\cdot 1-1=970\,299.$$

Предостережение: $(a-b)^3$ *не равно* a^3-b^3 [см. формулу 7].

6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ *Произведение суммы двух величин на «неполный квадрат разности» равно сумме их кубов.*

7. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. *Произведение разности двух величин на «неполный квадрат суммы» равно разности их кубов.*

§ 9. Деление сумм и многочленов

Частное от деления суммы двух или нескольких выражений на какое-либо выражение равно сумме частных, полученных от деления каждого слагаемого *на взятое выражение*:

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x};$$

a, b, c, x — любые выражения; если все они — одночлены, т. е. если выполняется *деление многочлена на одночлен*, то каждое из частных $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$, $\frac{c}{x}$ бывает возможно упростить (III, 6).

Пример. $\frac{3a^2b+11ab^2}{ab}=\frac{3a^2b}{ab}+\frac{11ab^2}{ab}=3a+11b.$

Если a, b, c — одночлены, а x — многочлен, т. е. если выполняется *деление многочлена на многочлен*, то частное, вообще говоря, *нельзя представить в виде многочлена* (подобно тому как частное от деления целого числа на целое не всегда можно представить в виде целого числа). Иначе говоря, не всегда можно найти такой многочлен, который, будучи умножен на многочлен, стоящий в делителе, дал бы многочлен, стоящий в делимом.

Пример. Частное $\frac{a^2+x^2}{a+x}$ нельзя представить в виде многочлена; частное $\frac{a^2-x^2}{a+x}$ можно представить в виде многочлена: $\frac{a^2-x^2}{a+x}=a-x$.

Деление многочлена на многочлен в общем случае можно выполнять *с остатком*, подобно тому как это делается при делении целых чисел. Необходимо, однако, установить, что́ такое деление многочленов с остатком. Если мы делим целое положительное число, например 35, на целое положительное число, например 4, то получаем 8 и 3 в остатке. Числа 8 и 3 обладают тем свойством, что $4\cdot 8+3=35$, т. е. если p — делимое, q — делитель, m — частное, а n — остаток, то $mq+n=p$. Но этого недостаточно для полного определения частного и остатка; так, в нашем примере ($p=35$, $q=4$) таким же свойством обладают также числа $m=6$, $n=11$; $m=4$; $n=19$. Нужно еще добавить, что число n должно быть *меньше* числа q. Это добавление нельзя буквально перенести на случай деления многочленов, ибо при одних значениях букв одно и то же выражение может быть больше, а при других — меньше, чем другое выражение. Упомянутое добавление должно быть видоизменено. В каждом из многочленов одна какая-нибудь из входящих в его члены букв принимается за главную; *наивысшая степень этой буквы называется* *степенью многочлена.* Тогда деление с остатком определяется так:

Разделить многочлен P на многочлен Q — значит найти многочлены M (частное) и N (остаток), удовлетворяющие двум требованиям: 1) должно соблюдаться равенство $MQ + N = P$ и 2) степень многочлена N должна быть ниже степени многочлена Q.

Замечание. Остаток N может вовсе не содержать главной буквы; тогда говорят, что N имеет нулевую степень.

Многочлены M и N, удовлетворяющие этим требованиям, всегда можно найти и притом единственным образом при данном выборе главной буквы. Однако они могут быть иными, если изменить выбор главной буквы. Процесс нахождения частного M и остатка N аналогичен процессу деления (с остатком) многозначного числа на многозначное. Роль цифр высшего и низшего разрядов играют члены, содержащие главную букву в высшей и низшей степенях. Перед делением члены делимого и делителя располагаются в порядке убывания степеней главной буквы.

Запись деления:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8a^3 & +\,16a^2 & -\,2a & +\,4 & \;4a^2 - 2a + 1 \\
\cline{5-5}
- & + & - & & \;2a + 5 \\
+\,8a^3 & -\,4a^2 & +\,2a & & \\
\cline{1-4}
 & 20a^2 & -\,4a & +\,4 & \\
 & - & + & - & \\
 & 20a^2 & -\,10a & +\,5 & \\
\cline{2-4}
 & & 6a & -\,1 &
\end{array}
$$

1) Делим первый член делимого $8a^3$ на первый член делителя $4a^2$; результат $2a$ есть первый член частного.

2) Помножаем полученный член на делитель $4a^2 - 2a + 1$; результат $8a^3 - 4a^2 + 2a$ подписываем под делимым, подобный член под подобным.

3) Вычитаем члены результата из соответствующих членов делимого; сносим следующий по порядку член делимого; получаем $20a^2 - 4a + 4$.

4) Первый член остатка $20a^2$ делим на первый член делимого; результат 5 есть второй член частного.

5) Помножаем полученный второй член частного на делитель, результат $20a^2 - 10a + 5$ подписываем под первым остатком.

6) Вычитаем члены этого результата из соответствующих членов первого остатка; получаем второй остаток $6a - 1$. Степень его меньше степени делителя. Деление закончено; частное $2a + 5$, остаток $6a - 1$.

§ 10. Деление многочлена на двучлен первой степени

Если многочлен, содержащий букву x, делить на двучлен первой степени $x-l$, где l — какое-либо число (положительное или отрицательное), то в остатке может получиться только многочлен нулевой степени (§ 9), т. е. некоторое число N. Число N можно отыскать, не находя частного. Именно, это число равно тому значению делимого, которое последнее получает при $x=l$.

Пример 1. Найти остаток от деления многочлена x^3-3x^2+5x-1 на $x-2$. Подставляя $x=2$ в данный многочлен, находим $N=2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=5$.

Действительно, выполнив деление, найдем частное $M=x^2-x+3$ и остаток $N=5$.

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена x^4+7 на $x+2$. Здесь $l=-2$. Подставляя $x=-2$ в x^4+7, находим $N=(-2)^4+7=23$.

Указанное свойство остатка называют *теоремой Безу* по имени открывшего его французского математика (1730—1783). Теорема Безу формулируется так: *многочлен*

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m$$

при делении на $x-l$ дает остаток

$$N=a_0l^m+a_1l^{m-1}+a_2l^{m-2}+\ldots+a_m.$$

Доказательство. По определению деления (§ 9) имеем:

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=(x-l)\,Q+N,$$

где Q — какой-то многочлен, а N — некоторое число. Подставим сюда $x=l$; член $(x-l)\,Q$ пропадет, и мы получим:

$$a_0l^m+a_1l^{m-1}+\ldots+a_m=N.$$

Замечание. Может оказаться, что $N=0$. Тогда l есть корень уравнения

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0. \tag{1}$$

Пример. Многочлен x^3+5x^2-18 делится на $x+3$ без остатка (в частном получается x^2+2x-6). Следовательно, -3 есть корень уравнения $x^3+5x^2-18=0$. Действительно, $(-3)^3+5\,(-3)^2-18=0$.

Обратно, если l есть корень уравнения (1), то левая часть этого уравнения делится на $x-l$ без остатка.

Пример. Число 2 является корнем уравнения $x^3-3x-2=0$ $(2^3-3\cdot 2-2=0)$. Следовательно, многочлен x^3-3x-2 делится на $x-2$ без остатка. Действительно,

$$(x^3-3x-2):(x-2)=x^2+2x+1.$$

§ 11. Делимость двучлена $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$

1. Разность одинаковых степеней двух чисел делится (без остатка) на разность этих чисел, т. е. x^m-a^m делится на $x-a$. *Этот признак, как и следующие, вытекает* из теоремы Безу (§ 10).

Частное состоит из m членов и имеет следующий вид: $(x^m-a^m):(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1}$ (показатели при x непрестанно убывают на единицу; в то же время показатели при a возрастают на единицу, так что сумма показателей неизменно равна $m-1$; все коэффициенты равны $+1$).

Примеры.

$$(x^2-a^2):(x-a)=x+a;$$
$$(x^3-a^3):(x-a)=x^2+ax+a^2;$$
$$(x^4-a^4):(x-a)=x^3+ax^2+a^2x+a^3;$$
$$(x^5-a^5):(x-a)=x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4.$$

2. Разность одинаковых *четных* степеней двух чисел делится не только на разность этих чисел (пункт 1), но и на их сумму, т. е. x^m-a^m при четном m делится и на $x-a$ и на $x+a$. Во втором случае частное имеет вид $x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots$ (знаки плюс и минус чередуются).

Примеры.

$$(x^2-a^2):(x+a)=x-a;$$
$$(x^4-a^4):(x+a)=x^3-ax^2+a^2x-a^3;$$
$$(x^6-a^6):(x+a)=x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5.$$

Замечание. Так как разность четных степеней делится на $x-a$ и на $x+a$, то она делится и на x^2-a^2.

Примеры.

$$(x^4-a^4):(x^2-a^2)=x^2+a^2;$$
$$(x^6-a^6):(x^2-a^2)=x^4+a^2x^2+a^4;$$
$$(x^8-a^8):(x^2-a^2)=x^6+a^2x^4+a^4x^2+a^6.$$

Закон составления частных очевиден; он легко подводится под закон пункта 1, например

$$(x^8 - a^8):(x^2 - a^2) = [(x^2)^4 - (a^2)^4]:(x^2 - a^2) = \\ = (x^2)^3 + a^2(x^2)^2 + (a^2)^2x^2 + (a^2)^3.$$

2а. Разность одинаковых *нечетных* степеней двух чисел не делится на сумму этих чисел.

Например, ни $x^3 - a^3$, ни $x^5 - a^5$ не делятся на $x + a$.

3. Сумма одинаковых степеней двух чисел никогда не делится на разность этих чисел.

Например, ни $x^2 + a^2$, ни $x^3 + a^3$, ни $x^4 + a^4$ не делятся на $x - a$.

4. Сумма одинаковых *нечетных* степеней двух чисел делится на сумму этих чисел (в частном знаки плюс и минус чередуются).

Примеры.

$$(x^3 + a^3):(x + a) = x^2 - ax + a^2;$$
$$(x^5 + a^5):(x + a) = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4.$$

4а. Суммы одинаковых чётных степеней двух чисел не делятся не только на разность (пункт 3), но и на сумму этих чисел. Например, $x^6 + a^6$ не делится ни на $x - a$, ни на $x + a$.

§ 12. Разложение многочленов на множители

Многочлен можно иногда представить в виде произведения двух или нескольких многочленов. Это возможно далеко не всегда, и в тех случаях, когда это возможно, найти требуемое разложение часто очень трудно. Практическое значение такого разложения состоит прежде всего в том, что оно часто позволяет упростить вид выражения (например, в том случае, когда в числителе и знаменателе дроби можно выделить одинаковые множители; примеры см. в следующем параграфе). Ниже перечислены простейшие случаи, когда разложение на множители выполняется.

1. Если все члены многочлена содержат в качестве множителя одно и то же выражение, его можно «вынести за скобки» (см. III, 6, сложение одночленов).

Пример 1. $7a^2xy - 14a^5x^3 = 7a^2x(y - 2a^3x^2)$.

Пример 2. $6x^2y^3 - 2uxy^2 + 4u^2xy =$
$$= 2xy(3xy^2 - uy + 2u^2).$$

2. Иногда оказывается возможным, разбив члены на несколько групп, вынести в каждой некоторый множитель за скобки, после чего внутри всех скобок окажется одно и то же выражение. Тогда это выражение в свою очередь вынесется за скобки, и многочлен будет разложен на множители.

Пример 1. $ax + bx + ay + by =$
$$= x(a+b) + y(a+b) = (a+b)(x+y).$$

Пример 2. $10a^3 - 6b^3 + 4ab^2 - 15a^2b =$
$$= 5a^2(2a-3b) + 2b^2(2a-3b) = (2a-3b)(5a^2+2b^2).$$

Замечание. Полезно иметь в виду, что выражение $a - b$ можно всегда представить в виде $-(b-a)$, так что на первый взгляд различные множители можно легко сделать одинаковыми.

Пример 3. $6ax - 2bx + 9by - 27ay =$
$$= 2x(3a-b) + 9y(b-3a) = 2x(3a-b) - 9y(3a-b) =$$
$$= (3a-b)(2x-9y).$$

3. Преобразование, объясненное в п. 2, иногда удается осуществить после предварительного введения новых (взаимно уничтожающихся) членов или разложения одного из членов на два слагаемых.

Пример 1. $a^2 - x^2 = a^2 + ax - ax - x^2 =$
$$= a(a+x) - x(a+x) = (a+x)(a-x)$$
[ср. формулу 3 § 8].

Пример 2. $p^2 + pq - 2q^2 = p^2 + 2pq - pq - 2q^2 =$
$$= p(p+2q) - q(p+2q) = (p+2q)(p-q).$$

4. От применения последнего приема иногда можно избавить себя, пользуясь несколькими готовыми формулами разложения, получаемыми обращением формул сокращенного умножения (III, 8), именно:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2;$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

и т. д.

Пример. $4x^2 + 20xy + 25y^2$. Применяя первую из приведенных формул ($a = 2x$; $b = 5y$), получаем:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x+5y)^2,$$

Удачное выполнение разложения многочлена на возможно большее число множителей зависит от умения комбинировать вышеперечисленные приемы.

Пример. $12+x^3-4x-3x^2=12-3x^2+x^3-4x=$
$=3(4-x^2)-x(4-x^2)=(4-x^2)(3-x)=$
$=(2+x)(2-x)(3-x).$

§ 13. Алгебраические дроби

Алгебраической дробью называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где буквы A и B обозначают любые буквенные или числовые выражения, а черта между ними есть знак деления. Делимое A называют *числителем*, делитель B — *знаменателем*. Дроби, рассматриваемые в арифметике, представляют частный случай алгебраической дроби (числитель и знаменатель — целые положительные числа). Действия с алгебраическими дробями совершаются по тем же правилам, что действия с дробями в арифметике (см. II, 16—22). Ввиду этого мы здесь ограничимся лишь несколькими типичными примерами.

Сокращение дроби

Пример 1. Дробь $\frac{15a^2x^4}{21a^5x^3}$ можно сократить на $3a^2x^3$; $\frac{15a^2x^4}{21a^5x^3}=\frac{5x}{7a^3}$.

Пример 2. Дробь $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$ можно сократить на $2a-3b$.

Чтобы обнаружить это, нужно разложить числитель и знаменатель на множители (см. III 12, случай 3):

$$\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}=\frac{(2a-3b)(a+b)}{(2a-3b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Сложение и вычитание дробей

Пример 1. Чтобы сложить дроби $\frac{m}{a^2b}+\frac{n}{ab^2}$, принимаем за общий знаменатель a^2b^2; дополнительные множители: b — для первого слагаемого, a — для второго:

$$\frac{m}{a^2b}+\frac{n}{ab^2}=\frac{mb+na}{a^2b^2}.$$

Пример 2. $\frac{a-b}{2a^2-ab-3b^2}-\frac{a+b}{2a^2-5ab+3b^2}=$

$$=\frac{a-b}{(2a-3b)(a+b)}-\frac{a+b}{(2a-3b)(a-b)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(2a-3b)(a+b)(a-b)}=\frac{-4ab}{(2a-3b)(a^2-b^2)}.$$

Замечание. Лишь при специальном подборе примера многочленные знаменатели дробей будут иметь общие множители. Вообще же это случай крайне редкий. Если же эти общие множители существуют, нахождение их требует довольно много времени. Для развития алгебраических навыков эти поиски полезны, поэтому внимание, уделяемое им в учебной литературе, вполне оправдывается. Но практическая польза их невелика, и часто гораздо лучше, не тратя времени на разыскание простейшего общего знаменателя, просто взять за общий знаменатель произведение данных знаменателей.

Умножение и деление дробей

Пример 1. $\frac{4a^2b}{3c^2d}\cdot\frac{2c^3d^2}{ab^3}=\frac{8acd}{3b^2}$. Сокращение можно производить либо до перемножения числителей и знаменателей, либо после.

Пример 2. $\frac{x^2-a^2}{x^2-bx+cx-bc}:\frac{x^2-ax-cx+ac}{x^2-b^2}=$

$$=\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x-b)(x+c)(x-a)(x-c)}=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x-c)}=\frac{(x+a)(x+b)}{x^2-c^2}.$$

§ 14. Пропорции

Определение отношения и пропорции см. II, 48. Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекает $ad=bc$ (произведение средних членов равно произведению крайних); обратно, из $ad=bc$ вытекают пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

и др. Все эти пропорции можно получить из исходной $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ с помощью следующих правил.

1. В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можно менять местами средние или крайние члены или те и другие. Получаем:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

2. В пропорции можно менять местами предыдущие и последующие члены обоих ее отношений. Из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ получается $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Эта пропорция уже получена выше $\left(\text{в виде } \frac{d}{c}=\frac{b}{a}\right)$. Точно так же ничего нового не получим, переставляя предыдущие и последующие члены в трех выше найденных пропорциях.

Производные пропорции. Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливы и следующие пропорции (так называемые *производные пропорции*), получаемые из данной:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\quad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d};\quad \frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d};\quad \frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};\quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d};$$

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Эти и множество подобных им производных пропорций могут быть объединены в двух основных формах:

$$\frac{ma+nb}{m_1a+n_1b}=\frac{mc+nd}{m_1c+n_1d}, \tag{1}$$

$$\frac{ma+nc}{m_1a+n_1c}=\frac{mb+nd}{m_1b+n_1d}, \tag{2}$$

где m, n, m_1, n_1 — любые числа [1]).

Так, полагая в формуле (1) $m=n=m_1=1$, $n_1=0$, получим производную пропорцию $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$; полагая

[1]) Форма (2) может быть получена по тому же правилу, что и (1), если предварительно переставить средние члены в данной пропорции.

в формуле (2) $m=n=m_1=1$, $n_1=0$, имеем $\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}$ или, переставляя средние члены, $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ и т. д.

§ 15. Зачем нужны уравнения

Вычислительные задачи бывают прямые и косвенные.

Вот пример *прямой* задачи: сколько весит кусок сплава, на изготовление которого пошло 0,6 *дм*³ меди (уд. вес 8,9 *кг/дм*³) и 0,4 *дм*³ цинка (уд. вес 7,0 *кг/дм*³)? При ее решении мы находим вес взятой меди ($8{,}9\cdot 0{,}6=5{,}34$ (*кг*)), затем вес цинка ($7{,}0\cdot 0{,}4=2{,}8$ (*кг*)) и, наконец, вес сплава ($5{,}34+2{,}8=8{,}14$ (*кг*)). Выполняемые действия и их последовательность диктуются самим условием задачи.

Вот пример *косвенной* задачи: кусок сплава меди и цинка объемом в 1 *дм*³ весит 8,14 *кг*. Найти объемные количества меди и цинка в этом сплаве. Здесь из условия задачи не видно, какие действия ведут к ее решению. При так называемом арифметическом решении нужно проявить подчас большую изобретательность, чтобы наметить план решения косвенной задачи. Каждая новая задача требует создания нового плана. Труд вычислителя затрачивается нерационально. Для рационализации вычислительного процесса и был создан метод уравнений, который является основным предметом изучения в алгебре (см. III, 1). Суть этого метода такова.

1. Искомые величины получают особые наименования. Мы пользуемся для этой цели буквенными знаками (предпочтительно последними буквами латинского алфавита x, y, z, u, v). Условие задачи с помощью этих знаков и знаков действий ($+$, $-$ и т. д.) «переводится на математический язык», т. е. связи между данными и искомыми величинами мы выражаем не словами и фразами разговорного языка, а математическими знаками. Каждая такая «математическая фраза» и есть уравнение.

2. После этого мы решаем уравнение, т. е. находим значения искомых неизвестных величин. Решение уравнения производится совершенно механически, по общим правилам. Нам не приходится больше учитывать особенности данной задачи; мы только должны применять раз навсегда установленные правила и приемы. (Выводом этих правил и занимается в первую очередь алгебра.)

Таким образом, уравнения нужны для того, чтобы механизировать труд вычислителя. После того как уравнение составлено, решение его можно получить вполне автоматически (в настоящее время сконструирован ряд таких автоматов). Вся трудность решения задачи сводится лишь к составлению уравнения.

§ 16. Как составлять уравнения

Составить уравнение — значит выразить в математической форме связь между данными (известными) задачи и искомыми (неизвестными) ее величинами. Иногда эта *связь настолько явно содержится в формулировке задачи*, что составление уравнения есть просто дословный пересказ задачи на языке математических знаков.

Пример 1. Петров получил за работу на 16 руб. больше, чем половина суммы, которую получил Иванов. Вместе они получили 112 руб. Сколько получили за работу Петров и Иванов?

Обозначим через x заработок Иванова. Половина его заработка есть $\frac{1}{2}x$; месячный заработок Петрова $\frac{1}{2}x+16$; вместе они зарабатывают 112 руб.; математическая запись последней фразы будет

$$\left(\frac{1}{2}x+16\right)+x=112\,.$$

Уравнение составлено. Решая его по раз навсегда установленным правилам (III, 20), находим, что заработок Иванова $x=64$ руб.; заработок же Петрова $\frac{1}{2}x+16=48$ (руб.).

Чаще, однако, случается, что связь между данными и искомыми величинами не указывается в задаче прямо; ее нужно установить, исходя из условий задачи. В практических задачах так и бывает почти всегда. Только что приведенный пример носит надуманный характер; в жизни почти никогда подобных задач не встречается.

Для составления уравнения поэтому нельзя дать вполне исчерпывающих указаний. Однако на первых порах полезно руководствоваться следующим. Примем за значение искомой величины (или нескольких величин) какое-нибудь наугад взятое число (или несколько чисел) и поставим себе задачу проверить, угадали ли мы правильное решение задачи или нет. Если мы сумели провести эту проверку и обнаружить либо то, что догадка наша верна, либо то, что она неверна (скорее всего случится, конечно, второе), то мы немедленно можем составить нужное уравнение (или несколько уравнений). Именно, запишем те самые действия, которые мы производили для проверки, только вместо наугад взятого числа введем буквенный знак неизвестной величины. Мы получим требуемое уравнение.

Пример 2. Кусок сплава меди и цинка объемом в 1 *дм*³ весит 8,14 *кг*. Сколько меди содержится в сплаве (уд. вес меди 8,9 *кг/дм*³; цинка — 7,0 *кг/дм*³)?

Возьмем наугад число, выражающее искомый объем меди, например 0,3 *дм*³. Проверим, удачно ли мы взяли это число. Так как 1 *дм*³ меди весит 8,9 *кг*, то 0,3 *дм*³ весят $8{,}9 \cdot 0{,}3 = 2{,}67$ (*кг*). Объем цинка в сплаве есть $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ (*дм*³). Вес его $7{,}0 \cdot 0{,}7 = 4{,}9$ (*кг*). Общий вес цинка и меди $2{,}67 + 4{,}9 = 7{,}57$ (*кг*). Между тем вес нашего куска, по условию задачи, 8,14 *кг*. Догадка наша несостоятельна. Но зато мы немедленно получим уравнение, решение которого даст правильный ответ. Вместо наугад взятого числа 0,3 *дм*³ обозначим объем меди (в *дм*³) через x. Вместо произведения $8{,}9 \cdot 0{,}3 = 2{,}67$ берем произведение $8{,}9\,x$. Это — вес меди в сплаве. Вместо $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ берем $1 - x$; это — объем цинка. Вместо $7{,}0 \cdot 0{,}7 = 4{,}9$ берем $7{,}0\,(1 - x)$; это — вес цинка. Вместо $2{,}67 + 4{,}9$ берем $8{,}9\,x + 7{,}0\,(1 - x)$; это — общий вес цинка и меди. По условию он равен 8,14 *кг*; значит, $8{,}9\,x + 7{,}0\,(1 - x) = 8{,}14$. Решение этого уравнения (см. III, 15) дает $x = 0{,}6$. Проверку наугад взятого решения можно делать различными способами; соответственно этому можно получить для одной и той же задачи различные виды уравнения; все они, однако, дадут для искомой величины одно и то же решение; такие уравнения называются *равносильными* друг другу (см. III, 18).

Разумеется, после получения навыков в составлении уравнений нет нужды производить проверку наугад взятого числа: можно для значения искомой величины брать не число, а какую-нибудь букву (x, y и т. д.) и поступать так, как если бы эта буква (неизвестное) была тем числом, проверить которое мы собираемся.

§ 17. Общие сведения об уравнениях

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком равенства (=), образуют *равенство* (числовое или буквенное).

Всякое верное числовое равенство, а также всякое буквенное равенство, справедливое при всех числовых значениях входящих в него букв, называется *тождеством.*

Примеры. 1) Числовое равенство $5\cdot 3+1=20-4$ есть тождество. 2) Буквенное равенство $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ есть тождество, так как при всех числовых значениях a и b правая и левая части дают одно и то же число.

Равенство, содержащее неизвестные буквенные величины и не являющееся тождеством, называется *уравнением* [1]). Уравнение называется *буквенным*, если все или некоторые известные величины, входящие в него, выражены буквами; в противном случае уравнение называется *числовым.*

Какие из букв, входящие в уравнение, представляют известные, а какие — неизвестные величины, должно быть отдельно указано. Обычно для этого неизвестные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита x, y, z, u, v, w. *По числу неизвестных* уравнения разделяются на уравнения с одним, двумя, тремя и т. д. неизвестными.

Решить числовое уравнение — значит найти такие числовые значения входящих в него неизвестных, которые обратят уравнение в тождество. Эти значения называются *корнями уравнения.*

Решить буквенное уравнение — значит найти такие выражения неизвестных через входящие в уравнения известные величины, которые, будучи подставлены в уравнение вместо соответствующих неизвестных, обратят уравнение в тождество. Найденные выражения называются *корнями уравнения.*

---

[1]) Это определение лишь по форме отличается от принятого в нынешних учебниках. Преимущество его я вижу в том, что оно позволяет сразу же провести четкое различие между решением числового и решением буквенного уравнения, а это важно и с научной и с педагогической точки зрения.

Замечу, что мне кажется более целесообразным определять уравнение просто как «равенство, содержащее неизвестные величины», *не исключая* случая, когда это равенство является тождеством. Ведь, имея буквенное равенство, мы в общем случае не знаем заранее, тождество оно или нет. Чтобы узнать это, нужно обычно пользоваться теми же приемами, которые применяются при решении уравнений. Поэтому естественно считать буквенное тождество *частным случаем уравнения.* Так прежде и делали; существовал даже термин «тождественное уравнение». Думаю, что к этому обычаю следовало бы вернуться.

Пример 1. $\frac{2}{3+x}=\frac{1}{2}x$ — числовое уравнение с одним неизвестным x. При $x=1$ оба выражения $\frac{2}{3+x}$ и $\frac{1}{2}x$ образуют тождество, т. е. дают одно и то же число; $x=1$ есть корень уравнения.

Пример 2. $ax+b=cx+d$ — буквенное уравнение с одним неизвестным x; при $x=\frac{d-b}{a-c}$ оно обращается в тождество, так как выражения $a\frac{d-b}{a-c}+b$ и $c\frac{d-b}{a-c}+d$ при всех значениях букв a, b, c, d дают одинаковые между собой числа (если преобразовать эти выражения, то каждое из них можно представить в виде $\frac{ad-bc}{a-c}$). Значение $x=\frac{d-b}{a-c}$ есть корень уравнения.

Пример 3. $3x+4y=11$ — числовое уравнение с двумя неизвестными. При $x=1, y=2$ оно обращается в тождество $3\cdot1+4\cdot2=11$. Значения $x=1$, $y=2$ — корни уравнения; $x=-3$, $y=5$ — также корни уравнения. Значения $x=2$, $y=1\frac{1}{4}$ — также корни уравнения. Уравнение имеет бесчисленное множество корней, однако оно — не тождество, так как, например, при $x=2$, $y=3$ правая и левая его части не равны между собой.

Пример 4. $2x+3=2(x+1)$ — числовое уравнение с одним неизвестным. Оно не обращается в тождество ни при каких значениях x (правую часть можно представить в виде $2x+2$: чему бы ни равнялось $2x$, прибавление к $2x$ числа 2 не может дать того же числа, что и прибавление к $2x$ числа 3). Это уравнение не имеет корней.

§ 18. Равносильные уравнения. Основные приемы решения уравнений

Равносильными уравнениями называются такие уравнения, которые имеют одни и те же корни, например уравнения $x^2=3x-2$ и $x^2+2=3x$ равносильны (оба имеют корни $x=1$ и $x=2$). Процесс решения уравнений заключается в основном в замене данного уравнения другим, ему равносильным.

Основные приемы, применяемые при решении уравнения, таковы.

1. Замена одного выражения другим, тождественно ему равным. Например, уравнение

$$(x+1)^2=2x+5$$

можно заменить равносильным уравнением

$$x^2+2x+1=2x+5.$$

2. Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую с переменой знака на обратный; например, в уравнении $x^2+2x+1=2x+5$ можно перенести все члены в левую часть, причем члены $+2x$ и $+5$ из правой части в левую перейдут со знаком минус. Уравнение $x^2+2x+1-2x-5=0$, или, что то же, $x^2-4=0$, равносильно исходному.

3. Умножение или деление обеих частей равенства на одно и то же выражение. При этом нужно иметь в виду, что *новое уравнение может не быть равносильным предыдущему, если выражение, на которое мы умножаем или делим, может быть равным нулю.*

Пример. Дано уравнение $(x-1)(x+2)=4(x-1)$. Разделив обе его части на $x-1$, получаем $x+2=4$. Это уравнение имеет единственный корень $x=2$. Исходное же уравнение, кроме корня $x=2$, имеет еще корень $x=1$. При делении на $x-1$ этот корень «потерялся». Наоборот, при умножении обеих частей уравнения $x+2=4$ на $(x-1)$ сверх корня $x=+2$ появляется новый корень $x=1$. Из этого отнюдь не следует, что не нужно умножать или делить обе части уравнения на выражение, могущее равняться нулю. Нужно только каждый раз, когда такое действие производится, учесть, не пропадут ли при этом какие-нибудь старые корни и не появятся ли какие-нибудь новые.

4. Можно также возводить обе части уравнения в одну и ту же степень или извлекать из обеих частей корни одной и той же степени; однако при этом также могут получаться уравнения, не равносильные исходным. Например, уравнение $2x=6$ имеет один корень $x=3$; уравнение же $(2x)^2=6^2$, т. е. $4x^2=36$, имеет два корня: $x=3$ и $x=-3$. Перед тем как выполнить преобразование уравнения, нужно посмотреть, не могут ли при этом пропасть некоторые старые его корни или появиться новые. Особенно важно установить, не пропадают ли старые корни; появление новых не так опасно, ибо всегда можно, получив некоторый корень, подставить его в исходное уравнение и непосредственно проверить, удовлетворяется ли оно.

§ 19. Классификация уравнений

Уравнение называется *алгебраическим*, если каждая из его частей есть многочлен или одночлен (III, 6) по отношению к неизвестным величинам.

Примеры. $bx + ay^2 = xy + 2^m$ — алгебраическое уравнение с двумя неизвестными; но уравнение $bx + ay^2 = xy + 2^x$ *не алгебраическое*, потому что правая часть равенства — не многочлен относительно букв x, y (слагаемое 2^x не есть одночлен относительно буквы x).

Степень алгебраического уравнения. Перенесем все члены алгебраического уравнения в одну его часть и произведем приведение подобных его членов; если уравнение после этого содержит только одно неизвестное, то *степенью уравнения называют наибольший из показателей при неизвестном.* Если уравнение содержит несколько неизвестных, то для каждого члена уравнения составляем *сумму показателей при всех входящих в него неизвестных. Наибольшая из этих сумм называется степенью уравнения.*

Пример 1. Уравнение $4x^3 + 2x^2 - 17x = 4x^3 - 8$ есть уравнение второй степени, так как после перенесения всех членов в левую часть уравнения последнее примет вид $2x^2 - 17x + 8 = 0$.

Пример 2. Уравнение $a^4x + b^5 = c^5$ есть уравнение первой степени, так как высшая степень неизвестного x — первая.

Пример 3. Уравнение $a^2x^5 + bx^3y^3 - a^8xy^4 - 2 = 0$ есть уравнение 6-й степени, так как суммы показателей степеней при неизвестных x и y составляют 5 для первого и третьего членов, 6 для второго и нуль для четвертого; наибольшая из этих сумм есть 6.

Часто к числу алгебраических относят и такие уравнения, решение которых приводится к решению алгебраических уравнений. Степенью такого уравнения называют *степень того алгебраического уравнения, к которому оно приводится.*

Пример 4. Уравнение $\frac{x+1}{x-1} = 2x$ есть уравнение второй степени, хотя в него вторая степень неизвестного прямо не входит. Но если заменить его (равносильным ему) алгебраическим уравнением (освободиться от знаменателя), то оно примет вид $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Уравнение первой степени (с любым числом неизвестных) называется также *линейным* уравнением.

§ 20. Уравнение первой степени с одним неизвестным

Уравнения 1-й степени с одним неизвестным после надлежащих преобразований можно представить в виде $ax = b$, где a и b — данные числа или буквенные выражения, содержащие известные величины. Решение (корень) имеет вид $x = \frac{b}{a}$. Технические трудности могут встретиться только при проведении преобразований.

Пример 1.

$$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x-1}{2x+5} - \frac{1}{x+2}.$$

1) Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{(3x-1)(x+2)-(2x+5)}{(2x+5)(x+2)}.$$

2) В числителе правой части откроем скобки и приведем подобные члены:

$$\frac{3x-5}{2(x+2)} = \frac{3x^2+3x-7}{(2x+5)(x+2)}.$$

3) Помножим обе части равенства на $2(2x+5)(x+2)$, чтобы освободить уравнение от знаменателей. (Вопрос о том, не вводятся ли при этом лишние корни, оставим открытым до окончания решения.)

$$(3x-5)(2x+5) = 2(3x^2+3x-7).$$

4) Открываем скобки:

$$6x^2+5x-25 = 6x^2+6x-14.$$

5) Переносим все неизвестные члены в левую часть, а известные в правую; после приведения подобных членов получаем $-x = 11$, и корень уравнения есть $x = -11$. Подставляя это значение в исходное уравнение, убеждаемся, что этот корень не лишний.

Пример 2.

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x-a)^2}{x(x-b)} + \frac{(x-b)^2}{x(x-a)} = 3.$$

1) Приводим левую часть к общему знаменателю:

$$x(x-a)(x-b).$$

(Дополнительные множители: x для первой дроби; $x-a$ для второй; $x-b$ для третьей.)

$$\frac{x^3+(x-a)^3+(x-b)^3}{x(x-a)(x-b)}=3.$$

2) Освобождаемся от знаменателя, умножая обе части равенства на $x(x-a)(x-b)$:

$$x^3+(x-a)^3+(x-b)^3=3x(x-a)(x-b).$$

3) Открыв скобки, имеем:

$$x^3+x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+x^3-3bx^2+3b^2x-b^3=$$
$$=3x^3-3ax^2-3bx^2+3abx.$$

4) Переносим неизвестные члены в левую часть, а известные в правую. После приведения подобных членов получаем:

$$3a^2x-3abx+3b^2x=a^3+b^3,$$

или

$$3(a^2-ab+b^2)x=a^3+b^3.$$

5) Находим отсюда корень уравнения:

$$x=\frac{a^3+b^3}{3(a^2-ab+b^2)}.$$

Это выражение можно упростить, сократив дробь на a^2-ab+b^2:

$$x=\frac{a+b}{3}.$$

§ 21. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

После выполнения преобразований, подобных рассмотренным в предыдущем параграфе, уравнение 1-й степени с двумя неизвестными x, y примет вид $ax+by=c$, где a, b, c — данные числа или буквенные выражения.

Отдельно взятое такое уравнение имеет бесчисленное множество корней. Одному из неизвестных (например, x) можно дать совершенно произвольное значение; значение y найдется из уравнения с одним неизвестным, которое получится после подстановки значения x в наше уравнение.

Например, в уравнении $5x+3y=7$ можно положить $x=2$; тогда имеем $10+3y=7$, откуда $y=-1$.

Если неизвестные x и y связаны не одним, а двумя уравнениями 1-й степени, то бесчисленное множество значений они могут иметь только в исключительных случаях (см. III, 23). Вообще же система двух уравнений 1-й степени с двумя неизвестными имеет только одну систему решений. Может оказаться (тоже в исключительных случаях), что она и вовсе не имеет решений (см. III, 23).

Решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными можно различными способами свести к решению одного уравнения первой степени с одним неизвестным. Два таких способа объяснены в следующем параграфе.

Задачи, приводящие к системе двух уравнений с двумя неизвестными, можно всегда решить и с помощью одного уравнения с одним неизвестным; однако при этом часто приходится уделять много внимания тем расчетам, которые при пользовании системой уравнений выполняются по шаблонным приемам в самом процессе решения системы. То же самое относится и к задачам, решаемым с помощью трех (или большего числа) неизвестных. Можно решить их и с помощью одной или двух неизвестных величин. Чем большее количество неизвестных величин вводится в рассмотрение, тем, вообще говоря, проще составлять каждое из уравнений, зато затрудняется процесс решения системы. Поэтому на практике предпочтительно вводить возможно меньшее число неизвестных букв с тем, однако, чтобы составление уравнений было не слишком хлопотливым.

П р и м е р. Кусок сплава меди и цинка объемом в 1 *дм*³ весит 8,14 *кг*. Сколько меди и цинка в сплаве (удельный вес меди 8,9 *кг/дм*³; цинка — 7,0 *кг/дм*³)? Обозначая через x и y неизвестные объемы меди и цинка, имеем два уравнения:

$$x+y=1, \qquad (1)$$

$$8{,}9x+7{,}0y=8{,}14. \qquad (2)$$

Первое выражает, что общий объем меди и цинка (в *дм*³) равен 1; второе — что общий вес их (в *кг*) равен 8,14 ($8{,}9x$ есть вес меди; $7{,}0y$ — вес цинка). Решая систему уравнений (1), (2) по общим правилам (III, 22), находим $x=0{,}6$, $y=0{,}4$. Эту же задачу мы решили в III, 16 (пример 2), вводя только одну неизвестную букву x. Указания, сделанные в III, 16, остаются в силе и при составлении системы уравнений с двумя и бóльшим числом неизвестных.

§ 22. Решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

a) **Способ подстановки** состоит в том, что: 1) из одного уравнения мы находим выражение одного из неизвестных, например x, через известные величины и другое неизвестное y; 2) найденное выражение подставляем во второе уравнение, в котором после этой подстановки будет *содержаться только одно неизвестное* y; 3) решаем полученное уравнение и находим значение y; 4) подставляя найденное значение y в выражение неизвестного x, найденное в начале решения, получаем значение x.

Пример. Решить систему уравнений:

$$8x-3y=46,$$
$$5x+6y=13.$$

1) Из первого уравнения находим выражение x через данные числа и неизвестное y:

$$x=\frac{46+3y}{8}.$$

2) Подставляем это выражение во второе уравнение:

$$5\cdot\frac{46+3y}{8}+6y=13.$$

3) Решаем полученное уравнение:

$$5(46+3y)+48y=104,\quad 230+15y+48y=104,$$
$$15y+48y=104-230,\quad 63y=-126,\quad y=-2.$$

4) Найденное значение $y=-2$ подставляем в выражение $x=\frac{46+3y}{8}$; получаем: $x=\frac{46-6}{8}$, т. е. $x=5$.

b) **Способ сложения или вычитания** состоит в том, что: 1) обе части одного уравнения умножаются на некоторый множитель; обе части второго уравнения умножаются на другой множитель. Эти множители подбираются так, чтобы коэффициенты при одном из неизвестных в обоих уравнениях после их умножения на эти множители имели одну и ту же абсолютную величину. 2) Складываем два уравнения или вычитаем их друг из друга, смотря по тому, имеют ли уравненные коэффициенты различные или одинаковые знаки; этим одно из неизвестных исключается. 3) Решаем полученное уравнение с одним неизвестным. 4) Другое неизвестное можно найти тем же приемом, но *обычно проще всего подставить найденное значение первого неизвестного в любое из данных уравнений и решить получившееся уравнение с одним неизвестным.*

Пример. Решить систему уравнений:

$$8x - 3y = 46,$$
$$5x + 6y = 13.$$

1) Проще всего уравнять абсолютные величины коэффициентов при y; обе части первого уравнения умножим на 2; обе части второго — на 1, т. е. оставляем второе уравнение неизменным:

$$\begin{array}{r|c|r} 8x - 3y = 46 & 2 & 16x - 6y = 92, \\ 5x + 6y = 13 & 1 & 5x + 6y = 13. \end{array}$$

2) Складываем два уравнения:

$$+\begin{array}{r} 16x - 6y = \ 92 \\ 5x + 6y = \ 13 \\ \hline 21x \qquad = 105 \end{array}$$

3) Решаем полученное уравнение:

$$x = \frac{105}{21} = 5.$$

4) Подставляем значение $x = 5$ в первое уравнение; имеем:

$$40 - 3y = 46; \quad -3y = 46 - 40; \quad -3y = 6.$$

Отсюда

$$y = \frac{6}{-3} = -2.$$

Способ сложения и вычитания следует предпочесть другим способам: 1) когда в данных уравнениях абсолютные величины коэффициентов при одном из неизвестных равны (тогда первый из этапов решения становится ненужным); 2) когда сразу видно, что числовые коэффициенты при одном из неизвестных уравниваются с помощью небольших целочисленных множителей; 3) когда коэффициенты уравнений содержат буквенные выражения.

Пример. Решить систему:

$$(a + c)\,x - (a - c)\,y = 2ab,$$
$$(a + b)\,x - (a - b)\,y = 2ac.$$

1) Уравниваем коэффициенты при x; помножая обе части первого уравнения на $(a+b)$, а второго на $(a+c)$, получаем:

$$(a+c)(a+b)x-(a+b)(a-c)y=2ab(a+b),$$
$$(a+c)(a+b)x-(a-b)(a+c)y=2ac(a+c).$$

2) Вычитаем из первого уравнения второе: получаем:

$$[(a-b)(a+c)-(a+b)(a-c)]y=$$
$$=2ab(a+b)-2ac(a+c).$$

3) Решаем полученное уравнение:

$$y=\frac{2ab(a+b)-2ac(a+c)}{(a-b)(a+c)-(a+b)(a-c)}.$$

Это выражение можно значительно упростить, для чего, однако, потребуются довольно долгие преобразования. В числителе и знаменателе раскроем скобки, приведем подобные члены и произведем разложение на множители. После этого дробь сократится; имеем:

$$y=\frac{2a(ab+b^2-ac-c^2)}{(a^2-ab+ac-bc)-(a^2+ab-ac-bc)}=$$
$$=\frac{2a[(ab-ac)+(b^2-c^2)]}{-2ab+2ac}=$$
$$=\frac{2a[(b-c)a+(b-c)(b+c)]}{-2a(b-c)}=$$
$$=\frac{2a(b-c)(a+b+c)}{-2a(b-c)}=-(a+b+c).$$

4) Чтобы найти x, уравняем коэффициенте при y в исходных уравнениях, помножив первое на $(a-b)$, второе на $(a-c)$. Вычтя одно полученное уравнение из другого, решим уравнение с одним неизвестным; найдем:

$$x=\frac{2ab(a-b)-2ac(a-c)}{(a-b)(a+c)-(a+b)(a-c)}.$$

Выполняя такие же преобразования, как в предыдущем пункте, получим $x=b+c-a$. Подстановка значения y в одно из исходных уравнений потребовала бы более утомительных вычислений; при решении буквенных уравнений так бывает очень часто.

§ 23. Общие формулы и особые случаи решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Решение системы уравнений вида

$$ax + by = c, \tag{1}$$

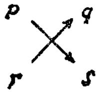
$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{2}$$

можно получать быстрее, если применять раз навсегда выведенные общие формулы. Последние можно получить любым способом, например способом сложения и вычитания. Решение будет иметь вид

$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}, \tag{3}$$

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}. \tag{4}$$

Эти формулы очень легко запомнить, если ввести для числителей и знаменателей следующее условное обозначение. Условимся знаком $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ обозначать выражение $ps - rq$, получающееся крестообразным умножением



и последующим вычитанием одного произведения из другого (со знаком $+$ берется то произведение, которое принадлежит *диагонали, опускающейся вправо*). Например, знак $\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ означает $5 \cdot 1 - 2 \cdot (-8) = 5 + 16 = 21$.

Выражение

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - rq$$

называют *определителем второго порядка* (в отличие от определителей третьего, четвертого и т. д. порядков, вводимых при решении систем уравнений 1-й степени с тремя, четырьмя и т. д. неизвестными).

С помощью введенных обозначений формулы (3) и (4) запишутся так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad (5) \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \quad (6)$$

т. е. каждое из неизвестных равно дроби, знаменатель которой есть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, а числитель получается из этого определителя заменой коэффициентов при соответствующем неизвестном на свободные члены.

Пример. Решить систему:

$$8x - 3y = 46,$$
$$5x + 6y = 13.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 46 & -3 \\ 13 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{46 \cdot 6 + 13 \cdot 3}{8 \cdot 6 + 5 \cdot 3} = \frac{315}{63} = 5,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 46 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8 \cdot 13 - 5 \cdot 46}{63} = \frac{-126}{63} = -2.$$

Исследование показывает, что при решении системы (1) — (2) могут представиться три существенно различных случая.

1) Коэффициенты уравнений (1), (2) непропорциональны: $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$. Тогда, каковы бы ни были свободные члены, уравнение имеет единственное решение, представляемое формулами (3), (4) или, что то же самое, формулами (5), (6).

2) Коэффициенты уравнений (1), (2) пропорциональны: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$. Тогда важно знать, находятся ли в том же отношении и свободные члены. Если находятся, т. е. если $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, то система уравнений имеет бесчисленное множество решений. Причина этого та, что в рассматриваемом случае одно из уравнений есть следствие другого, так что фактически у нас одно уравнение, а не два.

Пример. В системе

$$10x + 6y = 18,$$
$$5x + 3y = 9$$

коэффициенты при неизвестных x и y пропорциональны: $\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = 2$. В том же отношении находятся и свободные члены: $\frac{18}{9} = 2$. Одно из уравнений есть следствие другого; именно, первое получается из второго умножением обеих частей последнего на 2. Любое из бесчисленного множества решений одного из уравнений служит решением и другого.

3) Коэффициенты уравнений пропорциональны: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, но свободные члены не находятся в том же отношении. Тогда система не имеет решений, потому что уравнения друг другу противоречат.

Пример. В системе

$$10x+6y=20,$$
$$5x+3y=9$$

коэффициенты пропорциональны: $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}=2$. Отношение же свободных членов иное, чем отношение коэффициентов: $\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$. Система не имеет решений, потому что, помножив второе уравнение на 2, имеем $10x+6y=18$, что противоречит первому уравнению, ибо одно и то же выражение $10x+6y$ не может равняться и 18 и 20.

§ 24. Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

После выполнения преобразований, подобных рассмотренным в III, 20, уравнение первой степени с тремя неизвестными x, y, z примет вид $ax+by+cz=d$, где a, b, c, d — данные числа или буквенные выражения. Одно такое уравнение, отдельно взятое, или система двух таких уравнений имеет бесчисленное множество решений. Система трех уравнений 1-й степени с тремя неизвестными имеет в общем случае одну систему решения. В исключительных случаях (см. ниже) она может иметь бесчисленное множество или вовсе не иметь решений.

Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными основывается на тех же приемах, что и решение системы двух уравнений с двумя неизвестными, как видно из следующего примера.

Пример. Решить систему уравнений

$$3x-2y+5z=7, \qquad (1)$$
$$7x+4y-8z=3, \qquad (2)$$
$$5x-3y-4z=-12. \qquad (3)$$

Возьмем два уравнения этой системы, например (1) и (2), и будем исходить из предположения, что одно из неизвестных, например z, уже найдено, т. е. является известной величиной. Решая взятую систему относительно неизвестных x и y по правилам III, 22, найдем:

$$x=\frac{17-2z}{13}; \qquad y=\frac{59z-40}{26} \tag{4}$$

Подставив эти выражения x, y в уравнение (3), получим уравнение с одним неизвестным:

$$\frac{5(17-2z)}{13}-\frac{3(59z-40)}{26}-4z=-12.$$

Решив это уравнение (III, 20), найдем $z=2$. Подставив это значение в выражения (4), найдем $x=1$; $y=3$.

Общие формулы для решения системы

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=d,\\ a_1x+b_1y+c_1z&=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

можно получить тем же приемом. Решение будет иметь сложный и трудно запоминаемый вид, если его записать в развернутом виде, но ему можно придать легко запоминаемый и удобный для вычисления вид, если предварительно ввести понятие об *определителе третьего порядка.*

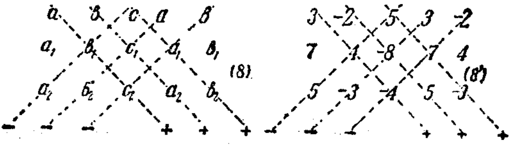
Определитель третьего порядка, сокращенно обозначаемый

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

есть не что иное, как выражение

$$ab_1c_2+bc_1a_2+ca_1b_2-cb_1a_2-ac_1b_2-ba_1c_2. \tag{7}$$

Это выражение не нужно запоминать, так как оно легко получается из своего схематического обозначения (6) следующим образом: перепишем таблицу (6), приписав к ней справа еще раз два первых ее столбца; таблица примет вид (8)



Проведем диагональные линии, отмеченные на схеме (8) пунктиром, и выпишем произведения букв, стоящих на каждой из шести диагональных линий. Со знаком + возьмем те три *произведения*, которые *принадлежат диагоналям*, *опускающимся вправо*; со знаком — остальные три произведения. Написав теперь эти произведения подряд, получим выражение (7).

Пример 1. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Схема (8) примет вид (8′).

Определитель (9) равен

$$3\cdot 4\cdot(-4)+(-2)\cdot(-8)\cdot 5+5\cdot 7\cdot(-3)-$$
$$-5\cdot 4\cdot 5-3\cdot(-8)\cdot(-3)-(-2)\cdot 7\cdot(-4)=$$
$$=-48+80-105-100-72-56=-301.$$

С помощью определителей решение системы (5) можно представить в виде

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

т. е. каждое из неизвестных равно дроби, знаменатель которой есть определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, а числитель получается из этого определителя заменой коэффициентов при соответствующем неизвестном на свободные члены.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$3x-2y+5z=7,$$
$$7x+4y-8z=3,$$
$$5x-3y-4z=-12.$$

Общий знаменатель формул (10) вычислен в примере; он равен —301. Числитель первой из формул (10) получается из (9) заменой первого его столбца столбцом свободных членов. Он имеет вид

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \\ -12 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя его по схеме (8), получим —301. Таким образом, получаем: $x = \frac{-301}{-301} = 1$ (ср. пример на стр. 170). Так же найдем:

$$y = \frac{-903}{-301} = 3; \qquad z = \frac{-602}{-301} = 2.$$

Система уравнений (5) имеет единственное решение если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Тогда формулы (10), в знаменателях которых стоит упомянутый определитель, дают решение системы (5). Если определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю, то формулы (10) становятся непригодными для вычисления. В этом случае система (5) либо имеет бесчисленное множество решений, либо совсем их не имеет. Бесчисленное множество решений она имеет в том случае, если не только определитель, стоящий в знаменателях, но и определители, стоящие в числителях формул (10), обращаются в нуль; важно отметить, что если определитель, стоящий в знаменателях, и один из определителей, стоящих в числителях, равны нулю, то два других определителя в числителях непременно равны нулю. Наличие бесчисленного множества решений обусловливается тем, что одно из трех уравнений (5) является следствием двух других [или даже два из уравнений (5) являются каждое следствием третьего], так что фактически мы имеем не три, а лишь два (или даже одно) уравнение с тремя неизвестными.

Пример 3. В системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + z &= -2, \\ 4x + 3y - 6z &= 1, \\ 2x + 21y - 15z &= 8 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

определитель из коэффициентов есть

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 21 & -15 \end{vmatrix} = 0$$

[см. схему (8)]. Взяв один из определителей, стоящих в числителях формул (10), например определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 8 & 21 & -15 \end{vmatrix},$$

входящий в первую из формул (10), найдем, что он также равен нулю. Остальные два определителя, входящие во вторую и третью формулы (10), не нужно вычислять: они заведомо равны нулю. Система (11) имеет бесчисленное множество решений: одно из ее уравнений (любое) является следствием двух других. Например, если помножить второе уравнение на 2, первое на -3 и сложить полученные уравнения, получим третье уравнение.

Система (5) вовсе не имеет решений, если определитель, стоящий в знаменателях формул (10), равен нулю, но ни один из определителей, стоящих в числителях, не равен нулю. При этом достаточно убедиться, что не равен нулю один из числителей; тогда два других непременно будут не равны нулю. Отсутствие решений обусловливается тем, что одно из уравнений противоречит двум остальным (или даже каждому из них в отдельности).

Пример 4. Возьмем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x - 5y + z &= -2, \\ 4x + 3y - 6z &= 1, \\ 2x + 21y - 15z &= 3, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

которая отличается от системы (11) только значением свободного члена в последнем уравнении. Поэтому определитель из коэффициентов остается тем же: он равен нулю. Но определители, входящие в числители, будут иными. Например, числитель первой из формул (10) будет

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 21 & -15 \end{vmatrix} = -135.$$

Он не равен нулю. Остальные два числителя заведомо не равны нулю. Система (12) не имеет решений. Она противоречива, ибо из первых двух уравнений вытекает как следствие уравнение $2x + 21y - 15z = 8$ (см. пример 3); *между* тем третье уравнение системы (12) имеет вид $2x + 21y - 15z = 3$, так что одно и то же выражение оказывается равным и 3 и 8, что невозможно.

§ 25. Правила действий со степенями

1. *Степень произведения двух или нескольких сомножителей равна произведению степеней этих сомножителей (с тем же показателем):*

$$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots$$

Пример 1. $(7\cdot 2\cdot 10)^2 = 7^2\cdot 2^2\cdot 10^2 = 49\cdot 4\cdot 100 = 19\,600.$

Пример 2. $(x^2 - a^2)^3 = [(x+a)(x-a)]^3 =$
$= (x+a)^3 (x-a)^3$ (ср. III, 8, п. 3).

Практически более важно обратное преобразование:

$$a^n b^n c^n \ldots = (abc\ldots)^n,$$

т. е. *произведение одинаковых степеней нескольких величин равно той же степени произведения этих величин.*

Пример 3. $4^3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(4\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{7}\right)^3 = 2^3 = 8.$

Пример 4. $(a+b)^2 (a^2 - ab + b^2)^2 =$
$= [(a+b)(a^2 - ab + b^2)]^2 = (a^3 + b^3)^2$ (ср. III, 8, п. 6).

2. *Степень частного (дроби) равна частному от деления той же степени делимого на ту же степень делителя*:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример 5. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$

Пример 6. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}.$

Обратное преобразование: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

Пример 7. $\frac{7{,}5^3}{2{,}5^3} = \left(\frac{7{,}5}{2{,}5}\right)^3 = 3^3 = 27.$

Пример 8.

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2} = \left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^2 = (a-b)^2$$

(ср. III, 8, п. 3).

3. *При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются* (ср. III, 6):

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Пример 9. $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 128$.

Пример 10. $(a - 4c + x)^2 (a - 4c + x)^3 =$
$= (a - 4c + x)^5$.

4. *При делении степеней с одинаковыми основаниями показатель степени делителя вычитается из показателя степени делимого* (ср. III, 6):

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Пример 11. $12^5 : 12^3 = 12^{5-3} = 12^2 = 144$.

Пример 12. $(x - y)^3 : (x - y)^2 = x - y$.

5. *При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются:* $(a^m)^n = a^{mn}$.

Пример 13. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

Пример 14. $\left(\frac{a^2b^3}{c}\right)^4 = \frac{(a^2)^4 (b^3)^4}{c^4} = \frac{a^8b^{12}}{c^4}$.

§ 26. Действия с корнями

В нижеприведенных формулах знаком $\sqrt{\ }$ обозначена абсолютная величина корня.

1. *Величина корня не изменится, если его показатель увеличить в n раз и одновременно возвести подкоренное количество в степень n:*

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}.$$

Пример 1. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3 \cdot 2]{8^2} = \sqrt[6]{64}$.

2. *Величина корня не изменится, если показатель степени уменьшить в n раз и одновременно извлечь корень n-й степени из подкоренного количества:*

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}.$$

Пример 2. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6:3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$.

Замечание. Это свойство останется в силе и в том случае, когда число $\frac{m}{n}$ не будет целым; точно так же оба вышеуказанных свойства сохранят силу и для n дробного.

Но для этого нужно сначала расширить понятие степени и корня, введя дробные показатели (см. III, 61).

3. *Корень из произведения нескольких сомножителей равен произведению корней той же степени из этих сомножителей:*

$$\sqrt[m]{abc\ldots}=\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots$$

Пример 3. $\sqrt[3]{a^6b^2}=\sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{b^2}=a^2\,\sqrt[3]{b^2}$.

Последнее преобразование основывается на свойстве 2.

Пример 4. $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\,\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

Обратно, произведение корней одной и той же степени равно корню той же степени из произведения подкоренных количеств:

$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots=\sqrt[m]{abc\ldots}$$

Пример 5. $\sqrt{a^3b}\cdot\sqrt{ab^3}=\sqrt{a^4b^4}=a^2b^2$.

4. *Корень от частного равен частному от деления корня из делимого на корень из делителя (показатели корней разумеются одинаковыми):*

$$\sqrt[m]{a:b}=\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}.$$

Обратно: $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a:b}$.

Пример 6. $\sqrt[3]{27:4}=\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{4}=3:\sqrt[3]{4}$.

5. *Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное количество:*

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

Обратно, чтобы извлечь корень из степени, достаточно возвести в эту степень корень из основания степени:

$$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$$

Пример 7. $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2=\sqrt[3]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab^2}=a\sqrt[3]{ab^2}$

Пример 8. $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3$,

6. Уничтожение иррациональности в знаменателе или в числителе дроби. Вычисление дробных выражений, содержащих радикалы, часто облегчается, если предварительно «уничтожить иррациональность» в числителе или знаменателе, т. е. преобразовать дробь так, чтобы в числителе или знаменателе не содержались радикалы.

Пример 9. Пусть требуется вычислить $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ с точностью до 0,01. Если произвести действия в указанном порядке, то мы имеем: 1) $\sqrt{7}\approx 2{,}646$; 2) $\sqrt{6}\approx 2{,}449$; 3) $2{,}646-2{,}449=0{,}197$; 4) $\frac{1}{0{,}197}\approx 5{,}10$. Для получения результата нужно было выполнить четыре действия; при этом, чтобы получить верные цифры сотых, нужно было вычислить корни с точностью до тысячных, в противном случае в делителе дроби $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ получились бы только две значащие цифры и в результате не могло бы быть трех верных значащих цифр (см. II, 42).

Если же предварительно помножим числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{7}+\sqrt{6}$, то получим:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1}.$$

Теперь вычисление требует только трех действий, и корни можно вычислять лишь с точностью до сотых: 1) $\sqrt{7}\approx 2{,}65$; 2) $\sqrt{6}\approx 2{,}45$; 3) $\sqrt{7}+\sqrt{6}\approx 5{,}10$.

Ниже приводится еще несколько типичных примеров.

Пример 10. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}$.

Пример 11. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$.

В этих примерах иррациональность уничтожалась в знаменателе. В следующих двух примерах она уничтожается в числителе.

Пример 12. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=\frac{7}{\sqrt{35}}$.

Пример 13. $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{34}}{3}=\frac{\sqrt{35^2}-\sqrt{34^2}}{3(\sqrt{35}+\sqrt{34})}=\frac{1}{3(\sqrt{35}+\sqrt{34})}$

Преобразование в примере 12 явно невыгодно для вычислительных целей, так как вычисление выражения $\frac{7}{\sqrt{35}}$ требует деления на многозначное число; вычисление же $\frac{\sqrt{35}}{5}$ (см. пример 10) требует деления на целое число. Но преобразование в примере 13 выгодно, так как позволяет вычислять корни $\sqrt{35}$ и $\sqrt{34}$ со столькими знаками, сколько их требуется иметь в результате. В исходном же выражении нужно извлекать корни с бо́льшим числом знаков (см. пример 9). Поэтому принятое в школьной практике огульное уничтожение иррациональности в знаменателе представляет вредную схоластическую традицию.

§ 27. Иррациональные числа

Запас целых и дробных чисел с избытком достаточен для измерительной практики (см. II, 31). Однако для теории измерения этого запаса мало.

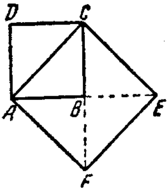


Рис. 1.

Пусть, например, требуется *точно* определить длину диагонали AC квадрата $ABCD$ (рис. 1), сторона которого равна 1 *м*. Площадь квадрата $ACEF$, построенного на диагонали, равна удвоенной площади $ABCD$ (треугольник ACB содержится в $ABCD$ два раза, а в $ACEF$ — четыре). Поэтому, если x есть искомая длина AC, то должно быть $x^2 = 2$. Но никакое целое число и никакая дробь не могут удовлетворить этому уравнению.

Остается одно из двух: или отказаться от точного выражения длин числами, или ввести новые числа, сверх целых и дробных. После длительной борьбы этих двух точек зрения победила вторая.

Числа нового рода, *представляющие длины отрезков, несоизмеримых с единицей масштаба* (т. е. отрезков, которые нельзя выразить целым или дробным числом), называются *иррациональными*[1]). В противоположность

[1]) Термин «иррациональный» дословно означает «не имеющий отношения». Первоначально его относили не к иррациональному числу, а к тем величинам, отношение которых мы сейчас выражаем иррациональным числом. Например, отношение диагонали квадрата к его стороне мы сейчас представляем числом $\sqrt{2}$. До того, как были введены иррациональные числа, говорили, что диагонали квадрата *не имеют отношения* к его стороне.

иррациональным числа целые и дробные получили название *рациональных*. После введения отрицательных чисел (оно произошло позднее; см. III, 2) и среди них стали различать рациональные и иррациональные.

Всякое рациональное число можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа (положительные или отрицательные). Иррациональные числа в этом виде *точно* представить нельзя. Но приближенно всякое иррациональное число можно *с любой степенью точности* заменить рациональным числом $\frac{m}{n}$; в частности, можно найти десятичную дробь (правильную или неправильную), как угодно мало отличающуюся от данного иррационального числа.

Числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{5}+\sqrt{7}}$ и многие другие выражения, содержащие рациональные числа под знаком радикала, иррациональны. Эти иррациональные числа называются «выражающимися через радикалы».

Однако ими далеко не исчерпывается запас иррациональных чисел. До конца 18 века математики были убеждены, что корень всякого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, если этот корень не рационален, можно выразить через радикалы; затем было доказано, что это верно лишь для уравнений до 4-й степени включительно (III, 2). Иррациональные корни уравнений 5-й и высших степеней, как правило, не могут быть выражены через радикалы. Числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, называются *алгебраическими числами*; лишь в исключительных случаях алгебраические числа выражаются радикалами; еще реже они рациональны.

Но и алгебраические числа не исчерпывают запаса иррациональных чисел. Так, например, известное из геометрии число π (см. IV, Б, 15) иррационально, но не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Точно так же число e (см. III, 64) не является алгебраическим. Иными словами, π и e — не алгебраические числа.

Иррациональное число, не могущее быть корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, называется *трансцендентным числом*.

До 1929 г. лишь для немногих чисел была доказана их трансцендентность; трансцендентность числа e была доказана в 1871 г. французским математиком Эрмитом. В 1882 г. немецкий математик Линдеман доказал трансцендентность числа π. Академик А. А. Марков (1856—1922) доказал трансцендентность чисел e и π новым методом. В 1913 г. Д. Д. Мордухай-Болтовской (1877—1952) указал ряд новых трансцендентных чисел. Однако все еще оставалось неизвестным, трансцендентны ли такие «обыкновенные» числа, как $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. Советские математики А. О. Гельфонд (род. 1906 г.) и Р. О. Кузьмин (1891—1949) доказали в 1929 г. и 1930 г., что трансцендентными являются все числа вида $\alpha^{\sqrt{n}}$, где α — алгебраическое число, не равное нулю или единице, а n — целое число. Числа $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ и т. п. как раз имеют этот вид. В 1934 г. А. О. Гельфонд завершил эти исследования. Он доказал трансцендентность всех чисел вида α^{β}, где α и β — любые алгебраические числа (при условии, что α не равно 0 или 1, а β иррационально). Например, число $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{\sqrt[3]{2}}$ трансцендентно. Из трансцендентности чисел α^{β} легко вытекает трансцендентность десятичных логарифмов всех целых чисел (конечно, кроме 1, 10, 100, 1000 и т. д.).

§ 28. Квадратное уравнение; мнимые и комплексные числа

Алгебраическое уравнение 2-й степени иначе называется *квадратным*. Наиболее общий вид квадратного уравнения с одним неизвестным есть

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — данные числа или буквенные выражения, содержащие известные величины (причем коэффициент a не может быть равен нулю, иначе уравнение будет не квадратным, а 1-й степени). Разделив обе его части на a, мы получим уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\left(p = \frac{b}{a};\ q = \frac{c}{a}\right).$$

Квадратное уравнение такого вида называется *приведенным*; уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (где $a \neq 1$) называется *неприведенным*. Если одна из величин b, c или обе вместе равны нулю, то квадратное уравнение называется *неполным*; если и b и c не равны нулю, квадратное уравнение называется *полным*.

Примеры.

$3x^2+8x-5=0$ — *полное неприведенное квадратное уравнение*;

$3x^2-5=0$ — *неполное неприведенное квадратное уравнение*;

$x^2-ax=0$ — *неполное приведенное квадратное уравнение*;

$x^2-12x+7=0$ — *полное приведенное квадратное уравнение*.

Неполное квадратное уравнение вида

$$x^2=m \quad (m \text{ — известная величина})$$

является самым простым типом квадратного уравнения и вместе с тем очень важным, так как к нему приводится решение всякого квадратного уравнения. Решение этого уравнения имеет вид

$$x=\sqrt{m}.$$

Возможны три случая:

1) Если $m=0$, то и $x=0$.

2) Если m — положительное число, то его квадратный корень $\sqrt{m}$ может иметь два значения: одно положительное, другое отрицательное. Абсолютные величины этих значений одинаковы. Например, уравнение $x^2=9$ удовлетворяется значением $x=+3$ и $x=-3$. Другими словами, x имеет два значения: $+3$ и -3. Часто это выражают тем, что перед радикалом ставят два знака — плюс и минус: $x=\pm\sqrt{9}$. При таком написании подразумевается, что выражение $\sqrt{9}$ обозначает общую абсолютную величину двух значений корня; в нашем примере — число 3. Величина $\sqrt{m}$ может быть иррациональным числом (см. III, 27). Заметим, что и само m может быть иррациональным числом. Например, пусть требуется решить уравнение

$$x^2=\pi$$

(геометрически это означает найти длину стороны квадрата равного по площади кругу с радиусом 1). Его корень $x=\sqrt{\pi}$. О способе извлечения квадратного корня из чисел см. II, 44.

3) Если m — отрицательное число, то уравнение $x^2=m$ (например, $x^2=-9$) не может иметь никакого положительного и никакого отрицательного корня: ведь и положительное и отрицательное число по возведении в квадрат дает положительное число. Таким образом, можно сказать, что уравнение $x^2=-9$ не имеет решений, т. е. число $\sqrt{-9}$ не существует.

Но с таким же основанием до введения отрицательных чисел можно было говорить, что и уравнение $2x+6=4$ не имеет решений. Однако после введения отрицательных чисел это уравнение стало разрешимым. Точно так же уравнение $x^2=-9$, не имеющее решений среди положительных и отрицательных чисел, становится разрешимым после введения новых величин — квадратных корней из отрицательных чисел. Эти величины были впервые введены итальянским математиком Кардано в середине 16 века в связи с решением кубического уравнения (см. III, 2). Кардано назвал эти числа «софистическими» (т. е. «мудреными»). Декарт в 30-х годах 17 века ввел наименование «мнимые числа», которое, к сожалению, удерживается до сих пор. В противоположность мнимым числам прежде известные числа (положительные и отрицательные, в том числе иррациональные) стали называть *действительными* или *вещественными*. Сумма действительного и мнимого чисел называется *комплексным числом* [1]). Например, $2+\sqrt{-3}$ есть комплексное число. Часто и комплексные числа называют мнимыми. Подробнее о комплексных числах см. III, 34 и след.

Введя в рассмотрение мнимые числа, можно сказать, что неполное квадратное уравнение $x^2=m$ всегда имеет два корня. Если $m>0$, эти корни действительны; они имеют одинаковую абсолютную величину и различны по знаку. Если $m=0$, оба они равны нулю; если $m<0$, — они мнимые.

§ 29. Решение квадратного уравнения

Чтобы найти решение приведенного квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

---

[1]) *Этот термин введен Гауссом в 1831 г. Слово «комплексный» означает в переводе «совокупный».*

достаточно перенести свободный член в правую часть и к обеим частям равенства прибавить $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Тогда левая часть станет полным квадратом, и мы получим равносильное уравнение

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Оно отличается от простейшего уравнения $x^2=m$ (§ 28) только внешним видом: $x+\frac{p}{2}$ стоит вместо x и $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ — вместо m. Находим:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Отсюда

$$\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}. \qquad (1)$$

Эта формула показывает, что всякое квадратное уравнение имеет два корня. Но эти корни могут быть и мнимыми $\left(\text{если } \left(\frac{p}{2}\right)^2<q\right)$. Может также оказаться, что оба корня квадратного уравнения равны между собой $\left[\text{если } \left(\frac{p}{2}\right)^2=q\right]$.

Формулу (1) особенно удобно применять в том случае, когда p — целое четное число.

Пример 1.

$$x^2-12x-28=0; \quad \text{здесь} \quad p=-12; \quad q=-28;$$
$$x=6\pm\sqrt{6^2+28}=6\pm\sqrt{64}=6\pm 8;$$
$$x_1=6+8=14;$$
$$x_2=6-8=-2.$$

Пример 2. $x^2+12x+10=0$;

$$x=-6\pm\sqrt{36-10}=-6\pm\sqrt{26};$$
$$x_1=-6+\sqrt{26}\approx-0{,}9; \quad x_2=-6-\sqrt{26}\approx-11{,}1.$$

Пример 3. $x^2-2mx+m^2-n^2=0$;

$$x=m\pm\sqrt{m^2-(m^2-n^2)}=m\pm\sqrt{n^2}=m\pm n;$$
$$x_1=m+n; \qquad x_2=m-n.$$

Замечание. В примере 2 оба корня — действительные отрицательные числа, но иррациональные (III, 27). Квадратные корни, получающиеся при решении квадратных уравнений, можно извлекать с помощью вычисления (см. II, 44) или находить по таблицам. К сожалению, в большинстве задачников упражнения на квадратные уравнения нарочито составляются так, чтобы корни извлекались точно. На практике же подобные случаи встречаются очень редко. Поэтому мы настоятельно рекомендуем учащимся избавиться от той боязни иррациональных решений, которая создается вследствие упомянутой особенности задачников.

Когда p не является целым четным числом, при решении приведенного квадратного уравнения предпочтительно пользоваться нижеприведенной более общей формулой (3), полагая в ней $a=1$ (см. ниже, пример 5).

Неприведенное полное квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (2)$$

можно решать по формуле

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (3)$$

Она получается из формулы (1) после того, как обе части неприведенного уравнения (2) мы разделим на a.

Пример 4. $3x^2-7x+4=0$

$$(a=3,\quad b=-7,\quad c=4).$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6};$$

$$x_1=\frac{7+1}{6}=\frac{4}{3};\qquad x_2=\frac{7-1}{6}=1.$$

Пример 5. $x^2+7x+12=0$

$$(a=1,\quad b=7,\quad c=12).$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot12}}{2};\quad x_1=-3;\quad x_2=-4$$

Пример 6. $0{,}60x^2+3{,}2x-8{,}4=0;$

$$x\approx\frac{-3{,}2\pm\sqrt{(-3{,}2)^2-4\cdot0{,}60\cdot(-8{,}4)}}{2\cdot0{,}60};$$

$$x_1\approx\frac{-3{,}2+5{,}5}{2\cdot0{,}60}\approx1{,}9;\qquad x_2\approx\frac{-3{,}2-5{,}5}{2\cdot0{,}60}\approx-7{,}2.$$

В примере 6, как явствует из написания $0{,}60x^2$ (а не $0{,}6x^2$) коэффициенты *предполагаются приближенными числами.* Поэтому и действия, указываемые формулой, рекомендуется выполнять сокращенным способом, изложенным в II, 33—44; во всяком случае нужно обязательно учесть, что согласно правилам, изложенным в указанных параграфах, в результате можно иметь только две точные значащие цифры. Заметим, что наши результаты верны с точностью до 0,1, но это отнюдь не означает, что, подставив их в левую часть данного уравнения, мы *получим число, равное нулю* с точностью до 0,1. Напротив, подставив в левую часть, например, значение $x = 1{,}9$, мы получим:

$$0{,}60 \cdot 1{,}9^2 + 3{,}2 \cdot 1{,}9 - 8{,}4 \approx -0{,}2.$$

Но если значение x увеличить на 0,1 и взять $x = 2{,}0$, то получим:

$$0{,}60 \cdot 2{,}0^2 + 3{,}2 \cdot 2{,}0 - 8{,}4 \approx 0{,}4.$$

Таким образом, при $x = 1{,}9$ левая часть была отрицательна; при $x = 2{,}0$ она уже положительна. Значит, она равна нулю при каком-то значении x, лежащем между 1,9 и 2,0. Следовательно, беря $x = 1{,}9$, мы ошибаемся не больше чем на 0,1. Это и имеется в виду, когда говорят, что корень равен 1,9 с точностью до 0,1.

Если b — четное число, то лучше представить общую формулу в виде

$$\boxed{x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

Пример 7. $3x^2 - 14x - 80 = 0$;

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 3 \cdot 80}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{289}}{3} = \frac{7 \pm 17}{3};$$

$$x_1 = 8; \quad x_2 = -\frac{10}{3}.$$

Этой же формулой удобно пользоваться, когда коэффициенты a, b, c — буквенные выражения.

Пример 8. $ax^2 - 2(a+b)x + 4b = 0$,

$$x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{a} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}}{a} =$$

$$= \frac{a+b \pm (a-b)}{a}.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 2\frac{b}{a}.$$

§ 30. Свойства корней квадратного уравнения

Формула

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

показывает, что при решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ могут представиться следующие три случая:

1) $b^2 - 4ac > 0$; тогда два корня уравнения действительны и различны между собой.

2) $b^2 - 4ac = 0$; тогда два корня уравнения действительны и равны между собой $\left(\text{оба равны } -\frac{b}{2a}\right)$.

3) $b^2 - 4ac < 0$; тогда оба корня уравнения мнимы.

Выражение $b^2 - 4ac$, величина которого позволяет различить один из этих трех случаев от других, называется *дискриминантом* (в переводе на русский язык «дискриминант» — «различающий»).

О знаках корней в том случае, когда они действительны (т. е. когда $b^2 - 4ac \geqslant 0$), лучше всего судить на основании следующего свойства корней.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

равна коэффициенту при неизвестном в первой степени, взятому с обратным знаком, т. е.

$$x_1 + x_2 = -p;$$

произведение же корней равно свободному члену, т. е.

$$x_1 x_2 = q.$$

§ 31. Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно разложить на множители первой степени следующим образом: решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Если x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пример 1. Разложить на множители (первой степени) трехчлен $2x^2+13x-24$. Решаем уравнение $2x^2+13x-24=0$. Находим корни: $x_1=\frac{3}{2}$; $x_2=-8$. Следовательно, $2x^2+13x-24=2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+8)=(2x-3)(x+8)$.

Пример 2. Разложить на множители x^2+a^2; уравнение $x^2+a^2=0$ имеет мнимые корни: $x_1=\sqrt{-a^2}$; $x_2=-\sqrt{-a^2}$, поэтому разложить x^2+a^2 на действительные множители первой степени нельзя. На мнимые множители он разлагается так: $x^2+a^2=(x+\sqrt{-a^2})(x-\sqrt{-a^2})=(x+ai)(x-ai)$ (через i обозначено мнимое число $\sqrt{-1}$).

§ 32. Уравнения высших степеней, разрешаемые с помощью квадратного уравнения

Некоторые алгебраические уравнения высших степеней можно решить, сведя их к квадратному. Вот важнейшие случаи.

1. Иногда левую часть уравнения легко разложить на множители, из которых каждый — многочлен не выше 2-й степени. Тогда, приравнивая каждый множитель по отдельности нулю, решаем полученные уравнения. Найденные корни будут корнями исходного уравнения.

Пример 1. $x^4+5x^3+6x^2=0$.

Многочлен $x^4+5x^3+6x^2$ легко разлагается на множители: x^2 и (x^2+5x+6). Решаем уравнение $x^2=0$; оно имеет два равных корня: $x_1=x_2=0$. Решаем уравнение $x^2+5x+6=0$. Обозначив его корни x_3 и x_4, имеем $x_3=-2$, $x_4=-3$. Корни исходного уравнения суть $x_1=x_2=0$; $x_3=-2$; $x_4=-3$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3=8$.

Переписав его в виде $x^3-8=0$, разложим на множители левую часть: $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. Уравнение $x-2=0$ дает $x_1=2$, уравнение $x^2+2x+4=0$ дает $x_2=-1+\sqrt{-3}$; $x_3=-1-\sqrt{-3}$. Итак, уравнение $x^3=8$ имеет один действительный корень и два мнимых. Иными словами, $\sqrt[3]{8}$, кроме очевидного действительного значения 2, имеет еще два мнимых (ср. III, 47, пример 3).

2. Если уравнение имеет вид $ax^{2n}+bx^n+c=0$, его можно свести к квадратному, введя новое неизвестное $x^n=z$.

Пример 3. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Переписав это уравнение в виде $(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$, введем новое неизвестное $x^2 = z$. Уравнение примет вид $z^2 - 13z + 36 = 0$. Корни его $z_1 = 9$, $z_2 = 4$. Решаем теперь уравнения $x^2 = 9$ и $x^2 = 4$. Первое имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, второе — корни $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Корни заданного уравнения суть: 3; -3; 2; -2.

Таким образом можно решить всякое уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Его называют *биквадратным.*

Пример 4. $x^6 - 16x^3 + 64 = 0$. Представляя это уравнение в виде $(x^3)^2 - 16x^3 + 64 = 0$, вводим новое неизвестное $x^3 = z$. Получаем уравнение $z^2 - 16z + 64 = 0$, имеющее два равных корня $z_1 = z_2 = 8$. Решаем уравнение $x^3 = 8$; получаем (см. пример 2) $x_1 = 2$; $x_2 = -1 + \sqrt{-3}$; $x_3 = -1 - \sqrt{-3}$. Другие три корня в данном случае (так как $z_1 = z_2$) равны этим трем.

§ 33. Система уравнений второй степени с двумя неизвестными

Наиболее общий вид уравнения 2-й степени с двумя неизвестными есть

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где a, b, c, d, e, f — данные числа или выражения, содержащие известные величины. Одно уравнение 2-й степени с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений (ср. III, 21).

Систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которых одно — квадратное, а другое — 1-й степени, можно решить способом подстановки, описанным в III, 22. Выражение одного неизвестного через другое находится из уравнения 1-й степени. Подставив это выражение в уравнение второй степени, получим уравнение с одним неизвестным. В общем случае оно будет квадратным (см. пример 1). Но может оказаться, что члены второй степени взаимно уничтожатся, и тогда мы будем иметь уравнение первой степени (см. пример 2).

Пример 1. $x^2 - 3xy + 4y^2 - 6x + 2y = 0$, $x - 2y = 3$. Из второго уравнения находим $x = 3 + 2y$. Подставляя это выражение в первое уравнение, имеем:

$$(3 + 2y)^2 - 3(3 + 2y)y + 4y^2 - 6(3 + 2y) + 2y = 0,$$

Решаем это уравнение:

$$9+12y+4y^2-9y-6y^2+4y^2-18-12y+2y=0;$$

$$2y^2-7y-9=0;$$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{4};$$

$$y_1=\frac{9}{2};\quad y_2=-1.$$

Найденные значения $y_1=\frac{9}{2}$, $y_2=-1$ подставляем в выражение $x=3+2y$; получаем $x_1=12$, $x_2=1$.

Пример 2. $x^2-y^2=1$; $x+y=2$.

Из второго уравнения находим $y=2-x$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x^2-(2-x)^2=1$. После приведения подобных членов члены второй степени взаимно уничтожаются, и мы получаем $-4+4x=1$, откуда $x=\frac{5}{4}$. Подставляя это значение в выражение $y=2-x$, находим $y=\frac{3}{4}$.

Систему двух квадратных уравнений с двумя неизвестными можно решать так: если одно из уравнений не содержит члена ax^2 (или члена cy^2), то применяем способ подстановки, выражая из этого уравнения x (или y) через y (или x); если же оба уравнения содержат члены вида ax^2 и cy^2, то предварительно применяем способ сложения или вычитания (III, 21), чтобы получить уравнение, не содержащее члена ax^2 и cy^2. После этого пользуемся способом подстановки. После исключения получается уравнение с одним неизвестным, имеющее, вообще говоря, 4-ю степень. К квадратному уравнению оно сводится лишь в исключительных случаях, но эти случаи встречаются довольно часто при решении геометрических задач.

Пример 3.

$$x^2+xy+2y^2=74,\quad 2x^2+2xy+y^2=73.$$

Оба уравнения содержат как члены с x^2, так и члены с y^2. Поэтому сначала применим способ сложения или вычитания, чтобы получить уравнение, не содержащее, скажем, y^2.

$$\begin{array}{r|c|l} 2x^2+2xy+y^2=73 & 2 & 4x^2+4xy+2y^2=146 \\ x^2+xy+2y^2=74 & & -\ \ x^2\mp xy\mp 2y^2=-74 \\ \hline & & 3x^2+3xy\qquad\quad\ =72. \end{array}$$

Из последнего уравнения находим выражение y через x:

$$y = \frac{24 - x^2}{x}.$$

Это выражение подставляем в одно из данных уравнений, например в первое; получаем:

$$x^2 + x\frac{24 - x^2}{x} + 2\frac{(24 - x^2)^2}{x^2} = 74.$$

Упрощения дают:

$$x^4 + 24x^2 - x^4 + 1152 - 96x^2 + 2x^4 = 74x^2;$$
$$2x^4 - 146x^2 + 1152 = 0;$$
$$x^4 - 73x^2 + 576 = 0.$$

Получилось биквадратное уравнение (см. III, 32, пример 3). Положив $x^2 = z$, приводим его к уравнению $z^2 - 73z + 576 = 0$. Решая последнее, находим:

$$z = \frac{73 \pm \sqrt{73^2 - 4 \cdot 576}}{2} = \frac{73 \pm \sqrt{3025}}{2} = \frac{73 \pm 55}{2},$$

$$z_1 = 64, \quad z_2 = 9.$$

Первое решение дает $x_1 = 8$; $x_2 = -8$; второе $x_3 = 3$, $x_4 = -3$. Подставляя значения x_1, x_2, x_3, x_4 в выражение $y = \frac{24 - x^2}{x}$, получаем соответствующие им значения y:

$$y_1 = -5; \ y_2 = +5; \ y_3 = +5; \ y_4 = -5.$$

Для решения систем уравнений второй степени часто можно с успехом использовать искусственные приемы решения, позволяющие получить результат быстрее и изящнее.

§ 34. О комплексных числах

В связи с развитием алгебры (III, 2) потребовалось ввести сверх прежде известных положительных и отрицательных чисел числа нового рода. Они называются *комплексными*.

Комплексное число имеет вид $a + bi$; здесь a и b — действительные числа, а i — число нового рода, называемое *мнимой единицей*. «Мнимые» числа (о них см. III, 28) составляют частный вид комплексных чисел (когда $a = 0$). С другой стороны, и действительные (т. е. положительные и отрицательные) числа являются частным видом комплексных чисел (когда $b = 0$).

Действительное число a назовем *абсциссой* комплексного числа $a+bi$; действительное число b — *ординатой* комплексного числа $a+bi$. Основное свойство числа i состоит в том, что произведение $i \cdot i$ равно -1, т. е.

$$i^2 = -1. \qquad (1)$$

Долгое время не удавалось найти такие физические величины, над которыми можно выполнять действия, подчиненные тем же правилам, что и действия над комплексными числами — в частности правилу (1). Отсюда названия: «мнимая единица», «мнимое число» и т. п. В настоящее время известен целый ряд таких физических величин, и комплексные числа широко применяются не только в математике, но также в физике и технике (теория упругости, электротехника, аэродинамика и др.).

Ниже (§ 40) дано геометрическое истолкование комплексных чисел. Предварительно (§§ 36—39) устанавливаются правила действий над ними; при этом оставляется в стороне вопрос о геометрическом или физическом смысле числа i, потому что в разных областях науки этот смысл различен.

Правило каждого действия над комплексными числами выводится из определения этого действия. Но определения действий над комплексными числами не вымышлены произвольно, а установлены с таким расчетом, чтобы они согласовались с правилами действий над вещественными числами (ср. II, 20). Ведь комплексные числа должны рассматриваться не в отрыве от действительных, а совместно с ними.

§ 35. Основные соглашения о комплексных числах

1. Действительное число a записывается также в виде $a+0 \cdot i$ (или $a-0 \cdot i$).

Примеры. Запись $3+0 \cdot i$ обозначает то же, что запись 3. Запись $-2+0 \cdot i$ означает -2. Запись $\frac{3\sqrt{2}}{2}+0 \cdot i$ означает $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Замечание. Аналогично мы поступаем и в обычной арифметике: запись $\frac{5}{1}$ обозначает то же, что запись 5. Запись 002 — то же, что 2, и т. п.

2. Комплексное число вида $0+bi$ называется «чисто мнимым» Запись bi обозначает то же, что $0+bi$.

3. Два комплексных числа $a+bi$, $a'+b'i$ считаются равными, если у них соответственно равны абсциссы и ординаты, т. е. если $a=a'$, $b=b'$. В противном случае комплексные числа не равны. Это определение подсказывается следующим соображением. Если бы могло существовать, скажем, такое равенство: $2+5i=8+2i$, то по правилам алгебры мы имели бы $i=2$, тогда как i не должно быть действительным числом.

Замечание. Мы еще не определили, что́ такое сложение комплексных чисел. Поэтому, строго говоря, мы еще не в праве утверждать, что число $2+5i$ есть *сумма* чисел 2 и $5i$. Точнее было бы сказать, что у нас есть *пара действительных чисел*: 2 (абсцисса) и 5 (ордината); эти числа порождают число нового рода, *условно обозначаемое* $2+5i$.

§ 36. Сложение комплексных чисел

Определение. Суммой комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ называют комплексное число $(a+a')+(b+b')\,i$.

Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример 1. $(-3+5i)+(4-8i)=1-3i$.

Пример 2. $(2+0i)+(7+0i)=9+0i$. Так как (III, 35) запись $2+0i$ означает то же, что 2 и т. д., то выполненное действие согласуется с обычной арифметикой $(2+7=9)$.

Пример 3. $(0+2i)+(0+5i)=0+7i$, т. е. (III, 35) $2i+5i=7i$.

Пример 4. $(-2+3i)+(-2-3i)=-4$.

В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу* $2a$[1]).

Замечание. Теперь, когда действие сложения определено, мы имеем право рассматривать комплексное число $a+bi$ как сумму чисел a и bi. Так, число 2 (которое мы условно записываем $2+0i$) и число $5i$ (которое согласно III, 35 означает то же число, что $0+5i$) в сумме дают (согласно определению) число $2+5i$.

---

[1]) Но сумма двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным числом; например $(3+5i)+(4-5i)=7$.

§ 37. Вычитание комплексных чисел

Определение. Разностью комплексных чисел $a+bi$ (уменьшаемое) и $a'+b'i$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a-a')+(b-b')i$.

Пример 1. $(-5+2i)-(3-5i)=-8+7i$.

Пример 2. $(3+2i)-(-3+2i)=6+0i=6$.

Пример 3. $(3-4i)-(3+4i)=-8i$.

Замечание. Вычитание комплексных чисел можно определить также как действие, обратное сложению. Именно мы ищем такое комплексное число $x+yi$ (разность), чтобы $(x+yi)+(a'+b'i)=a+bi$. Согласно определению § 36 имеем:

$$(x+a')+(y+b')i=a+bi.$$

Согласно условию равенства комплексных чисел (§ 35)

$$x+a'=a, \quad y+b'=b.$$

Из этих уравнений находим $x=a-a'$, $y=b-b'$.

§ 38. Умножение комплексных чисел

Определение умножения комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы 1) числа $a+bi$ и $a'+b'i$ можно было перемножать, как алгебраические двучлены, и чтобы 2) число i обладало свойством $i^2=-1$. В силу требования 1) произведение $(a+bi)(a'+b'i)$ должно равняться $aa'+(ab'+ba')i+bb'i^2$, а в силу требования 2) это выражение должно равняться $(aa'-bb')+(ab'+ba')i$. В соответствии с этим устанавливается следующее определение.

Определение. Произведением комплексных чисел $a+bi$ и $a'+b'i$ называется комплексное число

$$(aa'-bb')+(ab'+ba')i. \tag{1}$$

Замечание 1. Равенство $i^2=-1$ до установления правила умножения комплексных чисел носило характер требования. Теперь оно вытекает из определения. Ведь запись i^2, т. е. $i\cdot i$, равнозначна (III, 35) записи $(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)$. Здесь $a=0$, $b=1$, $a'=0$, $b'=1$. Имеем $aa'-bb'=-1$, $ab'+ba'=0$, так что произведение есть $-1+0i$, т. е. -1.

Замечание 2. На практике нет нужды пользоваться формулой (1) Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить $i^2=-1$.

Пример 1. $(1-2i)(3+2i)=3-6i+2i-4i^2=$ $=3-6i+2i+4=7-4i$.

Пример 2. $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Пример 2 показывает, что *произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число*[1]).

§ 39. Деление комплексных чисел

В соответствии с определением деления действительных чисел устанавливается следующее определение.

Определение. Разделить комплексное число $a+bi$ (делимое) на комплексное число $a'+b'i$ (делитель) — значит найти такое число $x+yi$ (частное), которое, будучи помножено на делитель, даст делимое.

Если делитель не равен нулю, то деление всегда возможно и частное единственно (доказательство см. в замечании 2). На практике частное удобнее всего находить следующим образом.

Пример 1. Найти частное $(7-4i):(3+2i)$.

Записав дробь $\frac{7-4i}{3+2i}$, расширяем ее на число $3-2i$, сопряженное с $3+2i$ (ср. III, 38, пример 1). Получим:

$$\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{13-26i}{13}=1-2i.$$

Пример 1 предыдущего параграфа дает проверку.

Пример 2. $\frac{-2+5i}{-3-4i}=\frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=\frac{-14-23i}{25}=$ $=-0{,}56-0{,}92i$.

Пример 3. $\frac{-6+21i}{4-14i}=-\frac{3}{2}$. Здесь проще всего сократить на $(-2+7i)$.

Поступая, как в примерах 1 и 2, найдем общую формулу:

$$(a+bi):(a'+b'i)=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-b'a}{a'^2+b'^2}\,i. \qquad (1)$$

---

[1]) Но произведение двух несопряженных комплексных чисел тоже может быть действительным положительным числом; например, $(2+3i)(4-6i)=26$ (ср. § 36, сноска на стр. 192). Если же и сумма и произведение двух *комплексных чисел являются* действительными числами, то эти комплексные числа непременно сопряженные.

Чтобы доказать, что правая часть (1) действительно является частным, достаточно помножить ее на $a' + b'i$. Получим $a + bi$.

Замечание 1. Формулу (1) можно было бы принять за определение деления (ср. определения §§ 36 и 37).

Замечание 2. Формулу (1) можно вывести еще следующим образом. Согласно определению мы должны иметь: $(a' + b'i)(x + yi) = a + bi$. Значит (§ 35), должны удовлетворяться следующие два уравнения:

$$a'x - b'y = a; \quad b'x + a'y = b. \tag{2}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}; \quad y = \frac{a'b - b'a}{a'^2 + b'^2},$$

если $\frac{a'}{b'} \neq -\frac{b'}{a'}$ (III, 23), т. е. если $a'^2 + b'^2 \neq 0$.

Остается рассмотреть случай $a'^2 + b'^2 = 0$. Он возможен лишь тогда (числа a' и b' действительны!), когда $a' = 0$ и $b' = 0$, т. е. когда делитель $a' + b'i$ равен нулю. Если при этом и делимое $a + bi$ равно нулю, то частное неопределенно (II, 23, п. 2). Если же делимое не равно нулю, то частное не существует (говорят, что оно равно бесконечности) (ср. II, 23, п. 3).

§ 40. Геометрическое изображение комплексных чисел

Действительные числа можно изобразить точками прямой линии, как показано на рис. 2, где точка A изображает число 4, а точка B — число -5. Эти же числа можно

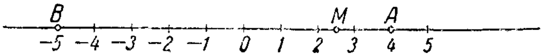


Рис. 2.

изображать также отрезками OA, OB, учитывая не только их длину, но и направление.

Каждая точка M «числовой прямой» изображает некоторое действительное число (рациональное, если отрезок OM соизмерим с единицей длины, и иррациональное, если несоизмерим). Таким образом, на числовой прямой не остается места для комплексных чисел.

Но комплексные числа можно изобразить на «числовой плоскости». Для этого мы выбираем на плоскости прямоугольную систему координат (VI, 6) с одним и тем же масштабом на обеих осях (рис. 3). Комплексное число $a+bi$ мы изображаем точкой M, у которой абсцисса x (на рис. 3 $x=OP=QM$) равна абсциссе a комплексного числа, а ордината y ($OQ=PM$) равна ординате b комплексного числа.

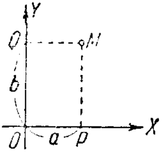


Рис. 3.

Примеры. На рис. 4 точка A с абсциссой $x=3$ и ординатой $y=5$ изображает комплексное число $3+5i$. Точка B изображает комплексное число $-2+6i$; точка C — комплексное число $-6-2i$; точка D — комплексное число $2-6i$.

Действительные числа (в комплексной форме они имеют вид $a+0i$) изображают точками оси X, а чисто мнимые (вида $0+bi$) — точками оси Y.

Примеры. Точка K на рис. 4 изображает действительное число 6 (или, что то же, комплексное число $6+0i$), точка L — чисто мнимое число $3i$ (т. е. $0+3i$); точка N — чисто мнимое число $-4i$ (т. е. $0-4i$). Начало координат изображает число 0 (т. е. $0+0i$).

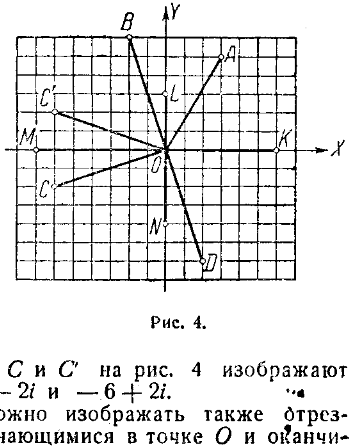


Рис. 4.

Сопряженные комплексные числа изображаются парой точек, симметричных относительно оси абсцисс; так, точки C и C' на рис. 4 изображают сопряженные числа $-6-2i$ и $-6+2i$.

Комплексные числа можно изображать также отрезками («векторами»), начинающимися в точке O и оканчивающимися в соответствующей точке числовой плоскости. Так, комплексное число $-2+6i$ можно изобразить не только точкой B (рис. 4), но также вектором OB; комплексное число $-6-2i$ изображается вектором OC и т. д.

Замечание. Давая какому-либо отрезку наименование *«вектор»*, мы подчеркиваем, что существенное значение имеет не только длина, но и *направление* отрезка. Два вектора считаются одинаковыми (равными) только в том случае, когда они имеют одинаковую длину и одно и то же направление.

§ 41. Модуль и аргумент комплексного числа

Длина вектора, изображающего комплексное число, называется *модулем* этого комплексного числа. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число. Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$, а также буквой r. Из чертежа (рис. 5) видно, что

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \quad (1)$$

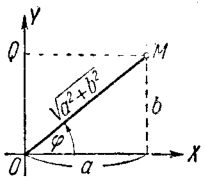


Рис. 5.

Модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. Сопряженные комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$ имеют один и тот же модуль.

Примеры. 1. Модуль комплексного числа $3+5i$ (т. е. длина вектора OA, рис. 4) равен $\sqrt{3^2+5^2}=$ $=\sqrt{34}\approx 5{,}83$.

2. $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

3. $|-3+4i|=5$.

4. Модуль числа -7 (т. е. $-7+0i$) есть длина вектора OM (рис. 4). Эта длина выражается положительным числом 7, т. е.

$$|-7+0i|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7.$$

5. Модуль числа $-4i$ (длина вектора ON, рис. 4) равен 4.

6. Модуль числа $-6-2i$ (длина вектора OC, рис. 4) равен $\sqrt{40}\approx 6{,}32$. Модуль числа $-6+2i$ (длина вектора OC', рис. 4) также равен $\sqrt{40}$. Два сопряженных комплексных числа всегда имеют равные модули.

Угол φ между осью абсцисс и вектором OM, изображающим комплексное число $a+bi$, называется *аргумен-*

том комплексного числа $a+bi$. На рис. 6 вектор OM изображает комплексное число $-3-3i$. Угол XOM является аргументом этого комплексного числа.

Каждое не равное нулю комплексное число[1]) имеет бесчисленное множество аргументов, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов (т. е. на $360^\circ k$, где k — любое целое число). Так, аргументами комплексного числа $-3-3i$ являются все углы вида $225^\circ \pm 360^\circ k$, например $225^\circ+360^\circ=585^\circ$, $225^\circ-360^\circ=-135^\circ$.

Аргумент φ связан с координатами комплексного числа $a+bi$ следующими формулами (см. рис. 5):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}, \quad (2) \qquad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (3) \qquad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (4)$$

Однако ни одна из них в отдельности не позволяет найти аргумент по абсциссе и ординате (см. примеры).

Пример 1. Найти аргумент комплексного числа $-3-3i$.

По формуле (2) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3}{-3}=1$. Этому условию удовлетворяют как угол 45°, так и угол 225°. Но угол 45° *не является* аргументом числа $-3-3i$ (рис. 6). Правильный ответ будет $\varphi=225^\circ$ (или -135°, или 585° и т. д.). Этот результат получится, если учесть, что абсцисса и ордината данного комплексного числа отрицательны. Значит, точка M лежит в третьей четверти.

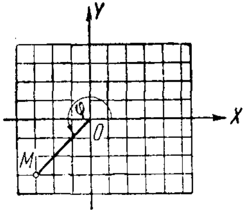


Рис. 6.

Другой способ. По формуле (3) находим $\cos\varphi=\frac{-1}{\sqrt{2}}$. Формула (4) показывает, что $\sin\varphi$ тоже отрицателен. Значит, угол φ принадлежит третьей четверти, так что $\varphi=225^\circ \pm 360^\circ k$.

Пример 2. Найти аргумент комплексного числа $-2+6i$. Находим $\operatorname{tg}\varphi=\frac{6}{-2}=-3$. Так как абсцисса отрицательна, а ордината положительна, то угол φ во второй четверти. С помощью таблиц находим $\varphi\approx 180^\circ-72^\circ=108^\circ$. См. рис. 4, где точка B изображает $-2+6i$.

Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента называется *главным*. *Так, для комплексных чисел*

---

[1]) Для числа 0 аргумент остается совершенно неопределенным.

$-3-3i$, $2i$, $-5i$ главные значения аргумента равны $-135°$, $+90°$, $-90°$.

Аргумент действительного положительного числа имеет главное значение 0°; для отрицательных чисел главным значением аргумента принято считать 180° (а не $-180°$).

У сопряженных комплексных чисел главные значения аргумента имеют одни и те же абсолютные значения, но противоположные знаки. Так, главные значения аргумента чисел $-3+3i$ и $-3-3i$ равны 135° и $-135°$

§ 42. Тригонометрическая форма комплексного числа

Абсцисса a и ордината b комплексного числа $a+bi$ выражаются через модуль r и аргумент φ (см. рис. 5) формулами

$$a=r\cos\varphi;\quad b=r\sin\varphi.$$

Поэтому всякое комплексное число можно представить в виде $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r\geqslant 0$.

Это выражение называется *нормальной тригонометрической формой* или, короче, тригонометрической формой комплексного числа.

Пример 1. Представить комплексное число $-3-3i$ в нормальной тригонометрической форме. Имеем (III, 41):

$$r=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$-3-3i=3\sqrt{2}(\cos(-135°)+i\sin(-135°))$$

или

$$-3-3i=3\sqrt{2}(\cos 225°+i\sin 225°)$$

и т. д.

Пример 2. Для комплексного числа $-2+6i$ имеем

$$r=\sqrt{(-2)^2+6^2}=\sqrt{40}$$

и (III, 41, пример 2) $\varphi=108°$. Следовательно, нормальная тригонометрическая форма числа $-2+6i$ есть

$$\sqrt{40}(\cos 108°+i\sin 108°).$$

Пример 3. Нормальная тригонометрическая форма числа 3 есть $3(\cos 0°+i\sin 0°)$ или, в общем виде,

$$3(\cos 360°k+i\sin 360°k).$$

Пример 4. Нормальная тригонометрическая форма числа — 3 есть $3(\cos 180° + i \sin 180°)$ или

$$3[\cos(180° + 360° k) + i \sin(180° + 360° k)].$$

Пример 5. Нормальная тригонометрическая форма мнимой единицы i есть $\cos 90° + i \sin 90°$ или

$$\cos(90° + 360° k) + i \sin(90° + 360° k).$$

Здесь $r = 1$.

Пример 6. Нормальная тригонометрическая форма числа $-i$ есть $\cos(-90°) + i \sin(-90°)$ или

$$\cos(-90° + 360° k) + i \sin(-90° + 360° k).$$

Здесь $r = 1$.

В противоположность тригонометрической форме выражение вида $a + bi$ называется *алгебраической* или *координатной* формой комплексного числа.

Пример 7. Комплексное число $2[\cos(-40°) + i \sin(-40°)]$ представить в алгебраической форме.

Здесь $r = 2$, $\varphi = -40°$. По формулам (3), (4) предыдущего параграфа

$$a = r \cos \varphi = 2 \cos(-40°) \approx 2 \cdot 0{,}766 = 1{,}532,$$

$$b = r \sin \varphi = 2 \sin(-40°) \approx 2 \cdot (-0{,}643) = -1{,}286.$$

Алгебраическая форма данного числа есть (приближенно) $1{,}532 - 1{,}286i$.

Пример 8. Представить в алгебраической форме число $3(\cos 270° + i \sin 270°)$. Так как $\cos 270° = 0$; $\sin 270° = -1$, то данное число равно $-3i$.

Пример 9. Если $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ есть одно из сопряженных комплексных чисел, то другое можно представить в виде $r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$ или в виде $r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$; впрочем, последнее выражение уже не будет нормальной формой.

§ 43. Геометрический смысл сложения и вычитания комплексных чисел

Пусть векторы OM и OM' (рис. 7) изображают комплексные числа $z = x + yi$ и $z' = x' + y'i$. Из точки M проведем вектор MK, равный OM' (т. е. имеет ту же длину и то же направление, что OM'; см. § 40, замечание).

Тогда вектор OK изображает сумму данных комплексных чисел [1]).

Построенный указанным образом вектор OK называется *геометрической суммой* (или, короче, суммой) векторов OM и OM' (название «сумма» проистекает из того, что совершенно таким же образом «складываются» скорости движущихся тел, силы, приложенные к одной точке, и многие другие физические величины).

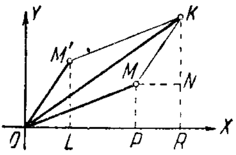


Рис. 7.

Итак, *сумма двух комплексных чисел представляется суммой векторов, изображающих отдельные слагаемые.*

Длина стороны OK треугольника OMK меньше суммы и больше разности длин OM и MK. Поэтому

$$||z|-|z'||\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|.$$

Равенство имеет место только в тех случаях, когда векторы OM и OM' имеют одинаковые (рис. 8) или противоположные направления (рис. 9).

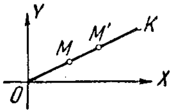


Рис. 8.

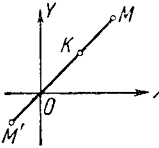


Рис. 9.

В первом случае $|OM|+|OM'|=|OK|$, т. е. $|z+z'|=|z|+|z'|$. Во втором случае $|z+z'|=||z|-|z'||$.

Пример 1. Пусть $z=4+3i$; $z'=5+12i$. Тогда

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5;\ |z'|=\sqrt{5^2+12^2}=13;\ z+z'=9+15i;$$

$$|z+z'|=\sqrt{9^2+15^2}=\sqrt{306}.$$

Имеем $13-5<\sqrt{306}<13+5$, т. е. $8<\sqrt{306}<18$.

---

[1]) Действительно, треугольники $OM'L$ и MKN равны. Значит, $x'=OL=MN=PR$; $y'=LM'=NK$. Следовательно, абсцисса $OR=OP+PR=x+x'$; ордината $RK=y+y'$.

Пример 2. Пусть $z=4+3i$; $z'=8+6i$. Эти комплексные числа имеют один и тот же аргумент (36°52′), т. е. соответствующие векторы имеют одинаковые направления. Здесь

$$|z|=5;\ |z'|=10;\ z+z'=12+9i;$$
$$|z+z'|=\sqrt{12^2+9^2}=15.$$

Имеем $10-5<15=10+5$.

Пример 3. Пусть $z=8-6i$; $z'=-12+9i$. Эти комплексные числа изображаются векторами, имеющими про-

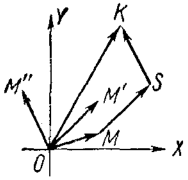


Рис. 10.

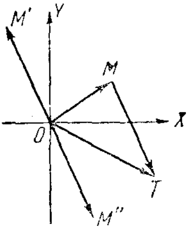


Рис. 11.

тивоположные направления (их аргументы равны 323°08′ и 143°08′). Здесь

$$|z|=10;\ |z'|=15;\ z+z'=-4+3i;\ |z+z'|=5.$$

Имеем:

$$15-10=5<15+10.$$

Сумма трех (и большего числа) комплексных чисел также представляется суммой векторов (OM, OM', OM'' на рис. 10), изображающих отдельные слагаемые, т. е. вектором OK, замыкающим ломаную $OMSK$ (вектор MS равен вектору OM'; вектор SK — вектору OM''). Слагаемые можно брать в любом порядке; ломаные будут различные, но концы их совпадут. Так как OK не длиннее, чем ломаная $OMSK$, то

$$|z+z'+z''|\leqslant|z|+|z'|+|z''|.$$

Равенство имеет место только тогда, когда все слагаемые имеют одно и то же направление.

Разность между комплексными числами $a+bi$ и $a'+b'i$ равна сумме чисел $a+bi$ и $-a'-b'i$. Второе слагаемое имеет тот же модуль, что $a'+b'i$, но противоположное направление. Поэтому *разность комплексных чисел, представляемых векторами OM и OM'* (рис. 11), *изображается суммой векторов OM и OM''* (вектором OT).

§ 44. Геометрический смысл умножения комплексных чисел

Пусть два комплексных числа z и z' изображаются векторами OM и OM' (рис. 12). Запишем сомножители в тригонометрической форме и вычислим произведение:

$$\begin{aligned} zz' &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = \\ &= rr'[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + \\ &\qquad + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')], \end{aligned}$$

т. е. (V, 17)

$$zz' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]. \tag{1}$$

Модуль произведения (оно изображено вектором OL) есть rr', а аргумент произведения равен $\varphi+\varphi'$, т. е. *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

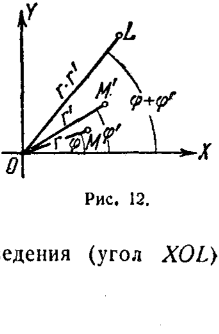


Рис. 12.

Это правило остается в силе для любого числа сомножителей.

Пример 1. У комплексных чисел, изображенных векторами OM и OM' на рис. 12, модули равны $|OM| = \frac{3}{2}$ и $|OM'| = 2$, а аргументы $\angle XOM = 20°$ и $\angle XOM' = 30°$. Модуль произведения, изображенного вектором OL, есть $\frac{3}{2}\cdot 2 = 3$; аргумент произведения (угол XOL) равен

$$20° + 30° = 50°;$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}(\cos 20° + i\sin 20°)\cdot 2(\cos 30° + i\sin 30°) &= \\ = 3(\cos 50° + i\sin 50°). \end{aligned}$$

Пример 2.

$$4\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ) =$$
$$= 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ) = -4 \quad (\text{рис. } 13).$$

Те же сомножители в алгебраической форме будут: $4+4i$ и $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Перемножив, снова найдем -4.

Пример 3. Перемножить $2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$,
$3[\cos(-160^\circ) + i\sin(-160^\circ)]$ и $0{,}5(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)$.

Модуль произведения $2\cdot 3\cdot 0{,}5 = 3$. Аргумент произведения $150^\circ - 160^\circ + 10^\circ = 0^\circ$. Произведение равно

$$3(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = 3.$$

Пример 4. $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r^2(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = r^2$, т. е. *произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное число, равное квадрату их общего модуля.*

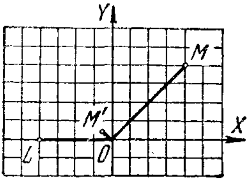


Рис. 13.

Пример 5. $\frac{3}{2}[\cos(-20^\circ) + i\sin(-20^\circ)]\cdot 2[\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)] = 3[\cos(-50^\circ) + i\sin(-50^\circ)]$. Сравнив с примером 1, видим, что *от замены сомножителей сопряженными числами произведение заменилось сопряженным числом.* Это свойство — общее. Оно распространяется на любое число сомножителей.

Замечание 1. Правила умножения действительных чисел оказываются частным случаем вышеприведенного правила. Так, при перемножении двух чисел -2 и -3 аргументы их (180° и 180°) дают в сумме 360°, так что произведение есть положительное число 6 [т. е. $6(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ)$].

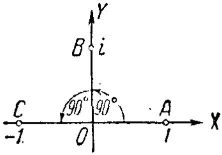


Рис. 14.

Замечание 2. Когда какое-либо комплексное число $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ умножается на мнимую единицу i (модуль ее есть 1, а аргумент $+90^\circ$), то модуль произведения остается равным r. Аргумент же увеличивается на 90°, т. е. вектор множителя поворачивается на угол $+90^\circ$, не меняясь по длине. В частности, умножение 1 (вектор OA рис. 14) на i представляется поворотом вектора OA на $90°$ в положение OB, а умножение i на i представляется поворотом OB на $90°$ в положение OC. Но вектор OC изображает -1. Поэтому $i^2=-1$. В этой геометрической картине число i является «мнимым» не в большей степени, чем число -1.

§ 45. Геометрический смысл деления комплексных чисел

Деление есть действие, обратное умножению. Поэтому (см. предыдущий параграф) *при делении комплексных чисел их модули делятся* (модуль делимого на модуль делителя), *а аргументы вычитаются* (аргумент делителя из аргумента делимого), т. е.

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi):r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=$$
$$=\frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]. \qquad (1)$$

Пример 1. $2(\cos 30°+i\sin 30°):6(\cos 45°+i\sin 45°)=$ $=\frac{1}{3}[\cos(-15°)+i\sin(-15°)]$.

Пример 2. $-4:4\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=$
$=4(\cos 180°+i\sin 180°):4\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 135°+i\sin 135°)$. Ср. пример 2 предыдущего параграфа.

В алгебраической форме:

$$-4:(4+4i)=\frac{-1}{1+i}=\frac{-1(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i}{2}.$$

Пример 3. Разделить 1 на комплексное число $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Запишем делимое в виде $1(\cos 0°+i\sin 0°)$. Согласно формуле (1) частное будет $\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$.

$$1:r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]. \qquad (2)$$

Геометрическое построение: опишем окружность радиуса 1 с центром в O. Пусть $|r|>1$, т. е. точка M (рис. 15), изображающая делитель, лежит вне окружности. Проведем касательную MT, из точки T проведем перпендикуляр TM' к OM. Точка L, симметричная с M' относительно оси абсцисс, изображает частное. Действительно, $|OL|=|OM'|$, а из прямоугольного треугольника OTM, в котором TM' — высота, находим $|OT|^2=|OM|\cdot|OM'|$, т. е. $1=r\,|OM'|$

или $|OM'| = \frac{1}{r}$. Аргументы же векторов OM и OL, очевидно, равны по величине и противоположны по знаку.

Для случая $|r| < 1$ построение показано на рис. 16.

Из формулы (2) следует, что от деления 1 на комплексное число с модулем $r = 1$ получается комплексное число, сопряженное с делителем.

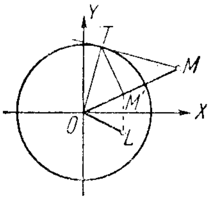


Рис. 15.

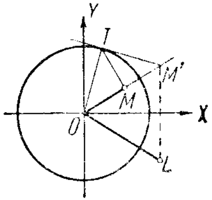


Рис. 16.

Пример 4. $2[\cos(-30°) + i\sin(-30°)] : 6[\cos(-45°) + i\sin(-45°)] = \frac{1}{3}(\cos 15° + i\sin 15°)$. Сравнив с примером 1, видим, что *от замены делимого и делителя сопряженными числами частное заменилось сопряженным числом.* Формула (1) показывает, что это свойство — общее.

§ 46. Возведение комплексного числа в целую степень

Согласно III, 44

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$
$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

и вообще

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (A)$$

где n — целое положительное число. Формула (A) называется *формулой Муавра* (A. Moivre, 1667—1754). Она верна и для целого отрицательного показателя n (III, 61), а также для $n = 0$.

Например, $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-3} = \frac{1}{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^3} = \frac{1}{r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)}$. Следовательно (ср. пример 3 предыдущего параграфа),

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-3} = r^{-3}[\cos(-3\varphi) + i\sin(-3\varphi)].$$

Итак, при возведении комплексного числа в любую целую степень *модуль возводится в ту же степень, а аргумент помножается на показатель степени.* О возведении в дробную степень см. § 48.

Пример 1. Возвести в шестую степень число

$$z=2(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ).$$

Имеем $z^6=2^6(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=32+32\sqrt{3}i$.

Пример 2. Возвести в 20-ю степень число

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Модуль числа z (III, 41) есть 1, а аргумент равен -60°. Следовательно, модуль числа z^{20} есть 1, а аргумент равен $-1200^\circ=-3\cdot 360^\circ-120^\circ$. Имеем:

$$z^{20}=\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 3. Найти выражение косинуса и синуса угла 3φ через косинус и синус угла φ.

Решение. $\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3=$
$=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi+3i^2\cos\varphi\sin^2\varphi+i^3\sin^3\varphi=$
$=\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi+i(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi)$.

Приравнивая абсциссы и ординаты (III, 35), находим:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi$$

и

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

Пример 4. Таким же образом найдем:

$$\cos 4\varphi=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi,$$
$$\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi,$$

а также общие формулы для $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ (см. V, 21).

§ 47. Извлечение корня из комплексного числа

Извлечение корня (II, 9, п. 6) есть действие, обратное возведению в степень. Поэтому (см. предыдущий параграф) *модуль корня* (целой степени) *из комплексного числа получается извлечением корня той же степени из* *модуля подкоренного числа, а аргумент — делением аргумента на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right). \qquad (B)$$

Здесь знаком $\sqrt[n]{r}$ обозначено положительное число (арифметический корень из модуля).

Корень n-й степени из всякого комплексного числа имеет n различных значений. Все они имеют одинаковые модули $\sqrt[n]{r}$; аргументы же получаются из аргумента одного из них последовательным прибавлением угла $\frac{1}{n}\cdot 360°$.

Действительно, пусть φ_0 есть аргумент подкоренного числа. Тогда $\varphi_0 + 360°$, $\varphi_0 + 2\cdot 360°$ и т. д. также являются его аргументами. Формула (B) показывает, что за аргумент корня можно принять не только $\frac{\varphi_0}{n}$, но также $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{1}{n}\cdot 360°$, $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2}{n}\,360°$ и т. д. Соответствующие значения корня не все различны между собой: аргумент $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{n}{n}\,360°$, т. е. $\frac{\varphi_0}{n} + 360°$, дает то же комплексное число, что и аргумент $\frac{\varphi_0}{n}$; аргумент $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{n+1}{n}\,360° = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{1}{n}\,360° + 360°$ дает то же комплексное число, что аргумент $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{1}{n}\,360°$, и т. д. *Различных* значений корня будет ровно n. См. примеры.

Пример 1. Извлечь квадратный корень из числа $-9i$. Модуль этого числа есть 9. Значит, модуль корня равен $\sqrt{9} = 3$. Аргумент подкоренного числа можно принять равным $-90°$, $-90° + 360°$, $-90° + 2\cdot 360°$ и т. д.

В первом случае получаем:

$$(-9i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}\,[\cos(-45°) + i\sin(-45°)] =$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\,i. \qquad (1)$$

Во втором случае

$$(-9i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}\,(\cos 135° + i\sin 135°) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,i. \qquad (2)$$

В третьем случае

$$(-9i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}\,(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} i,$$

т. е. то же, что в первом. Беря $\varphi = -90^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, $\varphi = -90^\circ + 4 \cdot 360^\circ$ или $\varphi = -90^\circ - 360^\circ$; $-90^\circ - 2 \cdot 360^\circ$ и т. д., мы будем поочередно получать значения (1) и (2).

Пример 2. Извлечь квадратный корень из числа 16. Аргумент этого числа есть $360^\circ k$ (k — целое число). Аргумент корня будет $360^\circ k : 2 = 180^\circ k$. Если k есть нуль или четное число, то аргумент корня равен нулю или кратен 360°

Тогда $16^{\frac{1}{2}} = 4(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 4$. Если же k — нечетное число, то аргумент будет 180° или отличаться от 180° на кратное 360°. Тогда $16^{\frac{1}{2}} = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -4$.

Пример 3. Извлечь кубический корень из 1. Модуль корня равен $\sqrt[3]{1} = 1$. Аргумент подкоренного числа есть $360^\circ k$ (k — любое целое число). Аргумент корня будет $120^\circ k$. Полагая $k = 0, 1, 2$, находим три значения аргумента корня: 0°, 120°, 240°. Соответствующие значения корня будут [1]):

$$z_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1,$$
$$z_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$
$$z_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

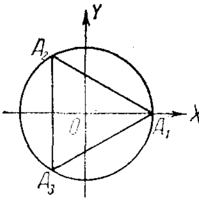


Рис. 17.

На рис. 17 эти значения изображены точками A_1, A_2, A_3.

[1]) Эти результаты полезно проверить. Помножив число $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ само на себя по правилу § 38, найдем $z_2^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_3$. Помножая еще раз, получим $z_2^3 = z_3 z_2 = 1$. Так же проверяется и корень $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Именно:

$$z_3^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_2,\ z_3^3 = z_2 z_3 = 1.$$

Треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний. Он вписан в окружность радиуса 1.

Пример 4. Извлечь корень шестой степени из -1. Аргумент подкоренного числа -1 есть $180° + 360° k$. Аргумент корня равен $30° + 60° k$. Имеем следующие шесть значений корня:

$$z_1 = \cos 30° + i \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$
$$z_2 = \cos 90° + i \sin 90° = i,$$
$$z_3 = \cos 150° + i \sin 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$
$$z_4 = \cos 210° + i \sin 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i,$$
$$z_5 = \cos 270° + i \sin 270° = -i,$$
$$z_6 = \cos 330° + i \sin 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i.$$

Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, изображающие эти значения (рис. 18), являются вершинами правильного шестиугольника.

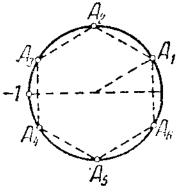


Рис. 18.

Из формулы (B) следует, что n корней из какого-либо комплексного числа и n корней из сопряженного числа попарно сопряжены.

Пример 5. Корни четвертой степени из числа $16(\cos 120° + i \sin 120°) = -8 + 8\sqrt{3}\, i$ будут:

$$z_1 = 2(\cos 30° + i \sin 30°) = \sqrt{3} + i;$$
$$z_2 = 2(\cos 120° + i \sin 120°) = -1 + \sqrt{3}\, i;$$
$$z_3 = 2(\cos 210° + i \sin 210°) = -\sqrt{3} - i;$$
$$z_4 = 2(\cos 300° + i \sin 300°) = 1 - \sqrt{3}\, i,$$

а корни той же степени из числа $16(\cos 120° - i \sin 120°) = -8 - 8\sqrt{3}\, i$ будут:

$$\bar{z}_1 = 2(\cos 30° - i \sin 30°) = \sqrt{3} - i;$$
$$\bar{z}_2 = 2(\cos 120° - i \sin 120°) = -1 - \sqrt{3}\, i;$$
$$\bar{z}_3 = 2(\cos 210° - i \sin 210°) = -\sqrt{3} + i;$$
$$\bar{z}_4 = 2(\cos 300° - i \sin 300°) = 1 + \sqrt{3}\, i.$$

Числа z_1 и $\bar{z}_1$, z_2 и $\bar{z}_2$ и т. д. попарно сопряжены.

§ 48. Возведение комплексного числа в любую действительную степень

Возведение в дробную степень действительного числа определено в *III*, 61. Но там рассматриваются только действительные значения степени. Здесь мы нуждаемся в более общем определении. Оно дается следующей формулой:

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^p = r^p(\cos p\varphi + i \sin p\varphi). \qquad (C)$$

Здесь p — любое действительное число, а r^p означает *положительное* число, представляющее p-ю степень модуля r. Формула (C) совпадает с формулой (A) (III, 46), когда p — *целое число*, и с (B) (III, 47), когда p есть дробь $\frac{1}{n}$. Если p есть дробь $\frac{m}{n}$, то в силу (C), (A) и (B)

$$[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^m}, \qquad (D)$$

что согласуется с обычным определением дробной степени.

Дробная степень всякого комплексного (в том числе и действительного) числа имеет n различных между собой значений (n — знаменатель дроби). Формула (C) распространяется и на случай иррациональности показателя p. В последнем случае p-я степень всякого числа имеет бесчисленное множество значений.

Пример 1. Возвести число -16 в степень $\frac{3}{4}$. Имеем: *$p = \frac{3}{4}$, $r = 16$, $\varphi = 180° + 360° k$. Модуль степени $(-16)^{\frac{3}{4}}$* согласно (C) равен $16^{\frac{3}{4}} = 8$. Аргумент степени равен

$\frac{3}{4}(180^\circ+360^\circ k)=135^\circ+270^\circ k$. Полагая $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ (остальные целые значения k новых результатов не дадут), имеем следующие четыре значения степени:

$$z_1=8(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i;$$
$$z_2=8[\cos(135^\circ+270^\circ)+i\sin(135^\circ+270^\circ)]=$$
$$=8(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i;$$
$$z_3=8[\cos(135^\circ+2\cdot 270^\circ)+i\sin(135^\circ+2\cdot 270^\circ)]=$$
$$=8[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i;$$
$$z_4=8[\cos(135^\circ+3\cdot 270^\circ)+i\sin(135^\circ+3\cdot 270^\circ)]=$$
$$=8[\cos(-135^\circ)+i\sin(-135^\circ)]=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i.$$

Эти значения изображены точками B_1, B_2, B_3, B_4 (рис. 19).

Пример 2. Возвести число 1 в степень $\frac{1}{2\pi}$. Здесь $p=\frac{1}{2\pi}$, $r=1$, $\varphi=360^\circ k$. Согласно (C) имеем:

$$1^{\frac{1}{2\pi}}=\cos\frac{360^\circ}{2\pi}k+i\sin\frac{360^\circ}{2\pi}k.$$

На рис. 20 показаны точки B_0, B_1, B_2, B_3, ..., изображающие те значения степени, которые получаются при $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots$ Все они лежат на окружности радиуса 1.

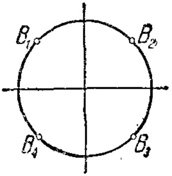


Рис. 19.

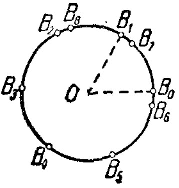


Рис. 20.

Никакие пары этих точек не совпадают друг с другом. В самом деле, каждый из углов B_0OB_1, B_1OB_2 и т. д. равен радиану, т. е. каждая из дуг B_0B_1, B_1B_2 и т. д. имеет длину, равную радиусу. Если бы некоторая точка B_l совпадала с B_0, то оказалось бы, что окружность, обойденная s раз (s—некоторое целое число), содержала бы l радиусов. Тогда однократно обойденная окружность имела бы длину, в точности равную $\frac{1}{s}$ радиусов. Но окружность несоизмерима с радиусом. Значит, ни одна пара точек B_0, B_1, ... не совпадает. Чем больше точек мы берем, тем плотнее покрывается ими окружность. Около любой ее точки скопляется бесконечное множество точек B. И все же повсюду на окружности остаются такие точки, куда не попадает ни одна из точек B. Такова, например, точка, диаметрально противоположная точке B_0, или любая вершина какого-нибудь правильного многоугольника, для которого B_0 есть одна из вершин.

З а м е ч а н и е. Можно определить степень комплексного числа и для комплексного показателя степени. Она тоже имеет бесчисленное множество значений, но соответствующие точки в общем случае не скопляются, а лежат врозь друг от друга.

§ 49. Некоторые сведения об алгебраических уравнениях высших степеней

Для уравнения 3-й и 4-й степени общего вида найдены (см. III, 2) формулы, выражающие корни уравнения через буквенные величины коэффициентов. Эти формулы содержат радикалы 2-й и 3-й степени. Они сложны и потому малопригодны для практики. Для уравнений более высокой степени таких формул совсем нет. Доказано, что корни общего уравнения степени выше 4-й нельзя выразить через буквенные коэффициенты с помощью конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений, возведений в степень и извлечений корня. Такое выражение возможно лишь для некоторых частных видов буквенных уравнений высших степеней.

Тем не менее корни всякого алгебраического уравнения с числовыми коэффициентами можно найти приближенно с любой степенью точности.

До введения комплексных чисел даже квадратное уравнение не всегда имело решение (III, 28). С введением комплексных чисел каждое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один корень (коэффициенты алгебраического уравнения могут быть совершенно произвольными — даже комплексными).

Уравнение n-й степени не может иметь больше чем n различных корней, а меньше — может. Например, уравнение пятой степени $(x-3)(x-2)(x-1)^3=0$ (в раскрытом виде $x^5-8x^4+24x^3-34x^2+23x-6=0$) имеет корни

$x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$. Других корней у него нет. Все же считают, что это уравнение имеет пять корней ($x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=1$). Корень 1 сосчитывают три раза, потому что левая часть данного уравнения содержит множитель $x-1$ в третьей степени.

При таком счете всякое уравнение n-й степени

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \quad (a_0\neq 1) \tag{1}$$

имеет ровно n корней, и вот почему. Уравнение (1) можно (единственным способом) представить в виде

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0. \tag{2}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни уравнения (1). Среди них несколько могут иметь одно и то же значение (в предыдущем примере $x_3=x_4=x_5=1$). Это значение сосчитывается в качестве корня столько раз, сколько оно повторяется. При таком счете общее число корней всегда равно n.

Если коэффициенты алгебраического уравнения действительные, а один из корней есть комплексное число $a+bi$, то сопряженное комплексное число $a-bi$ — тоже корень. Например, комплексное число $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ есть корень уравнения $x^4+1=0$ (III, 47); сопряженное комплексное число $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ — тоже корень этого уравнения. Таким образом, уравнение с действительными коэффициентами имеет всегда четное число комплексных корней.

Всякое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень (ведь комплексных корней всегда четное число, а общее число корней по условию нечетно).

Сумма корней уравнения (1) равна $-\frac{a_1}{a_0}$, а произведение корней равно $(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$. Эти свойства были указаны французским математиком Виета в 1591 г.[1]).

Пример. Уравнение $x^5-8x^4+24x^3-34x^2+23x-6=0$ ($n=5$; $a_0=1$, $a_1=-8$, $a_n=-6$) имеет корни (см. выше) 3, 2, 1, 1, 1. Сумма их составляет 8 $\left(\text{т. е.} -\frac{-8}{1}\right)$, а произведение 6 $\left(\text{т. е. } (-1)^5\cdot\frac{-6}{1}\right)$.

1) Виета не признавал отрицательных чисел (ср. III, 3) и потому рассматривал случай, когда все корни положительны.

Эти свойства (а также и другие аналогичные) выводятся из сопоставления уравнений (1) и (2) (у них должны быть одинаковыми все члены, в частности второй и последний).

§ 50. Общие сведения о неравенствах

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком «больше» ($>$) или знаком «меньше» ($<$), образуют *неравенство* (числовое или буквенное).

Всякое верное числовое неравенство, а также всякое буквенное неравенство, справедливое при всех числовых действительных значениях входящих в него букв, называется *тождественным*.

Пример 1. Числовое неравенство $2\cdot3-5<8-5$ (оно верно!) есть тождественное неравенство.

Пример 2. Буквенное неравенство $a^2>-2$ тождественно, так как при всяком числовом (действительном) значении a величина a^2 положительна или равна нулю и, значит, всегда больше, чем -2.

Два выражения соединяются также знаками $\leqslant$ («меньше или равно») и $\geqslant$ («больше или равно»). Так, запись $2a\geqslant3b$ означает, что величина $2a$ либо больше величины $3b$, либо равна ей. Такие записи также именуются неравенствами.

Буквенные величины, входящие в неравенство, могут подразделяться на известные и неизвестные. Какие из букв представляют известные, а какие неизвестные величины, должно быть отдельно указано. Обычно для этого неизвестные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита x, y, z, u, v и т. д.

Решить неравенство — значит указать границы, в которых должны заключаться (действительные) значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

Если дано несколько неравенств, то решить систему этих неравенств — значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы все данные неравенства были верными.

Пример 3. Решить неравенство $x^2<4$. Это неравенство верно, если $|x|<2$, т. е. если x заключено в границах между -2 и $+2$. Решение имеет вид: $-2<x<2$.

Пример 4. Решить неравенство $2x>8$.

Решение имеет вид: $x>4$. Здесь x ограничено только с одной стороны.

Пример 5. Неравенство $(x-2)(x-3)>0$ верно, если $x>3$ (тогда оба сомножителя $(x-2)$, $(x-3)$ положительны), а также при $x<2$ (тогда оба сомножителя отрицательны) и неверно, когда x заключено в границах между 2 и 3 (а также при $x=2$ и при $x=3$). Поэтому решение представляется двумя неравенствами:

$$x > 3;\ x < 2.$$

Пример 6. Неравенство $x^2 < -2$ не имеет решений (ср. пример 2).

§ 51. Основные свойства неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$; наоборот, если $a < b$, то $b > a$.

Пример. Если $5x - 1 > 2x + 1$, то $2x + 1 < 5x - 1$.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Точно так же, если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Пример. Из неравенств $x > 2y$, $2y > 10$ следует, что $x > 10$.

3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$ (и $a - c > b - c$). Если же $a < b$, то $a + c < b + c$ (и $a - c < b - c$), т. е. *к обеим частям неравенства можно прибавить* (или из них вычесть) *одну и ту же величину*.

Пример 1. Дано неравенство $x + 8 > 3$. Вычитая из обеих частей неравенства число 8, находим $x > -5$.

Пример 2. Дано неравенство $x - 6 < -2$. Прибавляя к обеим частям 6, находим $x < 4$.

4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$; точно так же, если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$, т. е. *два неравенства одинакового смысла*[1]) *можно почленно складывать*. Это справедливо и для любого числа неравенств, например, если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Пример 1. Неравенства $-8 > -10$ и $5 > 2$ верны. Складывая их почленно, находим верное неравенство $-3 > -8$.

Пример 2. Дана система неравенств $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y < 18$; $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y < 4$. Складывая их почленно, находим $x < 22$.

Замечание. Два неравенства одинакового смысла *нельзя почленно вычитать* друг из друга, так как результат может быть верным, но может быть и неверным. Например, если из неравенства $10 > 8$ почленно вычесть неравенство $2 > 1$, то получим верное неравенство $8 > 7$, но если из того же неравенства $10 > 8$ почленно вычесть

---

[1]) Выражение «неравенства одинакового смысла» означает, что оба неравенства содержат знак $>$ или оба содержат знак $<$.

неравенство $6 > 1$, то получим нелепость. Сравнить следующий пункт.

5. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$; если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$, т. е. *из одного неравенства можно почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла*[1], *оставляя знак того неравенства, из которого вычиталось другое.*

Пример 1. Неравенства $12 < 20$ и $15 > 7$ верны. Вычитая почленно второе из первого и оставляя знак первого, получаем верное неравенство $-3 < 13$. Вычитая почленно первое из второго и оставляя знак второго, находим верное неравенство $3 > -13$.

Пример 2. Дана система неравенств $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y < 18$; $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y > 8$. Вычитая из первого неравенства второе, находим $y < 10$.

6. Если $a > b$ и m — положительное число, то $ma > mb$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, т. е.

обе части неравенства можно разделить или умножить на одно и то же положительное число (знак неравенства остается тем же).

Если же $a > b$ и n — отрицательное число, то $na < nb$ и $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$, т. е.

обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, но при этом знак неравенства нужно переменить на противоположный[2].

Пример 1. Разделив обе части верного неравенства $25 > 20$ на 5, получим верное неравенство $5 > 4$. Если же мы делим обе части неравенства $25 > 20$ на -5, то нужно переменить знак $>$ на $<$, и тогда получим верное неравенство $-5 < -4$.

Пример 2. Из неравенства $2x < 12$ следует, что $x < 6$.

Пример 3. Из неравенства $-\frac{1}{3}x > 4$ следует, что $x < -12$.

Пример 4. Дано неравенство $\frac{x}{k} > \frac{y}{l}$; из него следует, что $lx > ky$, если знаки чисел l и k одинаковы, и что $lx < ky$, если знаки чисел l и k противоположны.

---

[1] Выражение «неравенства противоположного смысла» означает, что одно из неравенств содержит знак $>$, а другое знак $<$.

[2] Умножать (а также, конечно, и делить) обе части неравенства на нуль нельзя.

§ 52. Некоторые важные неравенства

1. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Здесь a и b — произвольные действительные или комплексные числа (но $|a|$, $|b|$ и $|a+b|$ — всегда действительные и притом положительные числа, см. III, 5 и III, 41), т. е. *модуль суммы не превосходит суммы модулей.* Равенство имеет место только в тех случаях, когда оба числа́ a и b имеют один и тот же аргумент (III, 41), в частности, когда оба эти числа положительны или оба отрицательны.

Пример 1. Пусть $a=+3$; $b=-5$. Тогда $a+b=-2$; $|a+b|=2$; $|a|=3$; $|b|=5$. Имеем $2<3+5$.

Пример 2. Пусть $a=4+3i$; $b=6-8i$. Тогда

$$a+b=10-5i; \quad |a+b|=\sqrt{10^2+(-5)^2}=\sqrt{125};$$
$$|a|=\sqrt{4^2+3^2}=5; \quad |b|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10;$$
$$|a|+|b|=15.$$

Имеем $\sqrt{125}<15$.

Замечание. Неравенство $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ можно распространить на большее число слагаемых; так,

$$|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|.$$

2. $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$ (a — положительное число). Равенство имеет место только при $a=1$.

3. $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (a и b — положительные числа), т. е. *среднее геометрическое* (II, 45) *двух чисел не превосходит их среднего арифметического.* Равенство $\sqrt{ab}=\frac{a+b}{2}$ имеет место только в случае $a=b$.

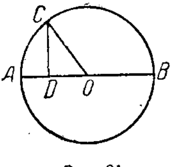


Рис. 21.

Пример. $a=2$, $b=8$; $\sqrt{ab}=4$; $\frac{a+b}{2}=5$; имеем $4<5$.

Это неравенство было известно более 2000 лет назад. Геометрически оно очевидно из рис. 21, где

$$CD=\sqrt{AD \cdot DB} \quad \text{и} \quad CO=AO=\frac{AD+DB}{2}.$$

Обобщением его является следующее неравенство, установленное французским математиком Коши в 1821 г.:

4. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ (числа a_1, a_2, ..., a_n положительны). Равенство имеет место лишь в случае, когда все числа a_1, a_2, ..., a_n равны.

5. $1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqslant \sqrt{ab}$ (a и b положительны). Знак равенства имеет место лишь при $a=b$.

Пример. $a=2$, $b=8$; $1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{16}{5}$; имеем $\frac{16}{5}<4$.

Величина $1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2ab}{a+b}$ является средней (II, 45) между a и b. Она называется *средней гармонической*[1]). Таким образом:

среднее гармоническое двух величин не превосходит их среднего геометрического. Это свойство обобщается на любое число величин; в соединении с неравенством п. 4 имеем:

$$1:\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

6. $$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

(числа a_1, a_2, ..., a_n произвольные). т.е. *абсолютная величина среднего арифметического не превосходит среднее квадратическое* (II, 47). Знак равенства имеет место лишь в случае, когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Пример. $a_1=3$, $a_2=4$, $a_3=5$, $a_4=6$.

Здесь среднее арифметическое есть $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{9}{2}$, а среднее квадратическое есть

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}}=\sqrt{\frac{9+16+25+36}{4}}=\frac{\sqrt{86}}{2};$$

имеем $\frac{9}{2}<\frac{\sqrt{86}}{2}$.

---

[1]) В древнегреческом учении о музыкальной гармонии важную роль играла средняя гармоническая длин двух струн. Отсюда название «гармоническое»

7. $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant$
$$\leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2};$$

числа $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ произвольны. Равенство имеет место только при $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$.

Пример. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$; $b_1 = -3$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$. Имеем $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$;

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30};$$
$$\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}.$$

Имеем $9 < \sqrt{30} \cdot \sqrt{14}$.

8. Неравенства П. Л. Чебышева. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ положительны.

Если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, то
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}. \quad (1)$$

Если же $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, но $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, то
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}. \quad (2)$$

В обоих случаях равенство имеет место только тогда когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой и вместе с тем все числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ равны друг другу.

Пример 1. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$ и $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$. Тогда
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1 + 2 + 7}{3} = \frac{10}{3};$$
$$\frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} = \frac{2 + 3 + 4}{3} = 3;$$
$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4}{3} = 12.$$

Имеем:
$$\frac{10}{3} \cdot 3 < 12.$$

Пример 2. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$ и $b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $b_3 = 2$. Тогда
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = \frac{10}{3}, \quad \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} = 3, \quad \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3} = 8.$$

Имеем

$$\frac{10}{3}\cdot 3>8.$$

Неравенства (1) и (2) словами читаются так:

Если два ряда положительных величин содержат одинаковое число членов и в обоих рядах члены не убывают (или в обоих не возрастают), *то произведение средних арифметических не превосходит среднего арифметического произведений. Если же в одном ряду члены не убывают, а в другом не возрастают, то имеет место противоположное неравенство.*

Эти неравенства были установлены в 1886 г. великим русским математиком П. Л. Чебышевым (1821—1894). Он же обобщил их, доказав следующие неравенства:

Если $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ и $0<b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$, то

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{n}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+\ldots+(a_nb_n)^2}{n}} \qquad (3)$$

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{n}}\sqrt[3]{\frac{b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3}{n}}<$$
$$\leqslant\sqrt[3]{\frac{(a_1b_1)^3+(a_2b_2)^3+\ldots+(a_nb_n)^3}{n}} \qquad (4)$$

и так далее.

Если же $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$, но $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n>0$, то имеют место противоположные неравенства.

§ 53. Равносильные неравенства. Основные приемы решения неравенств

Два неравенства, содержащих одни и те же неизвестные, называются *равносильными*, если они верны при одних и тех же значениях этих неизвестных.

Так же определяется равносильность двух систем неравенств.

Пример 1. Неравенства $3x+1>2x+4$ и $3x>2x+3$ равносильны, так как оба верны при $x>3$ и оба неверны, когда $x\leqslant 3$.

Пример 2. Неравенства $2x\leqslant 6$ и $x^2\leqslant 9$ не равносильны, так как решение первого есть $x\leqslant 3$, а решение второго $-3 \leqslant x \leqslant 3$, так что, например, при $x = -4$ первое верно, а второе неверно.

Процесс решения неравенства заключается в основном в замене данного неравенства (или данной системы неравенств) другими равносильными [1]). При решении неравенств применяются следующие основные приемы (ср. III, 18).

1. Замена одного выражения другим, тождественно ему равным.

2. Перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с переменой знака на обратный (в силу § 51, п. 3).

3. Умножение или деление обеих частей неравенства на одну и ту же числовую величину (не равную нулю). При этом если множитель положителен, то знак неравенства остается тем же, если же отрицателен, то знак неравенства меняется на противоположный (§ 51, п. 6).

Каждое из этих преобразований дает неравенство, равносильное исходному.

Пример. Дано неравенство $(2x-3)^2 < 4x^2+2$. Заменяем левую часть тождественно равным выражением $4x^2-12x+9$. Получаем $4x^2-12x+9 < 4x^2+2$. Переносим из правой части член $4x^2$ в левую, а из левой части член 9 в правую часть. После приведения подобных членов получаем $-12x < -7$. Делим обе части неравенства на -12; при этом знак неравенства меняем на противоположный. Получаем решение данного неравенства $x > \frac{7}{12}$.

Умножать (а также, конечно, и делить) неравенство на нуль нельзя. Умножая или деля обе части неравенства на буквенные выражения, мы получаем неравенство, которое, как правило, не равносильно исходному.

Пример. Дано неравенство $(x-2)x < x-2$. Если разделить обе его части на $x-2$, получим $x < 1$. Но это неравенство не равносильно исходному, ибо, например, значение $x=0$ не удовлетворяет неравенству $(x-2)x < x-2$. Неравенство $x > 1$ тоже не равносильно исходному, ибо, например, значение $x=3$ неравенству $(x-2)x < x-2$ не удовлетворяет.

§ 54. Классификация неравенств

Неравенства, содержащие неизвестные величины, подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные*; алгебраические неравенства подразделяются на *неравенства*

---

[1]) О графическом решении неравенств см. VI, 10.

первой, второй и т. д. *степени.* Эта классификация производится совершенно так же, как для уравнений (III, 19).

Пример 1. Неравенство $3x^2-2x+5>0$ алгебраическое, второй степени.

Пример 2. Неравенство $2^x>x+4$ трансцендентное.

Пример 3. Неравенство $3x^2-2x+5>3x(x-2)$ алгебраическое, первой степени, потому что оно приводится к неравенству $4x+5>0$.

§ 55. Неравенство первой степени с одним неизвестным

Неравенство первой степени с одним неизвестным можно привести к виду

$$ax>b.$$

Решением будет:

$$x>\frac{b}{a}, \text{ если } a>0,$$

и

$$x<\frac{b}{a}, \text{ если } a<0.$$

Пример 1. Решить неравенство $5x-3>8x+1$.

Решение. $5x-8x>3+1$; $-3x>4$; $x<-\frac{4}{3}$.

Пример 2. Решить неравенство $5x+2<7x+6$.

Решение. $5x-7x<6-2$; $-2x<4$; $x>-2$.

Пример 3. Решить неравенство $(x-1)^2<x^2+8$.

Решение. $x^2-2x+1<x^2+8$; $-2x<7$; $x>-\frac{7}{2}$.

Замечание. Неравенство вида $ax+b>a_1x+b_1$ есть неравенство первой степени, *если a и a_1 не равны.* В противном случае это неравенство приводится к числовому (верному или неверному).

Пример 1. Дано неравенство $2(3x-5)<3(2x-1)+5$. Оно равносильно неравенству $6x-10<6x+2$, а последнее приводится к числовому (тождественному) неравенству $-10<2$. *Значит, исходное неравенство — тождественное.*

Пример 2. Неравенство $2(3x-5)>3(2x-1)+5$ приводится к бессмысленному числовому неравенству $-10>2$. Значит, исходное неравенство не имеет решений.

§ 56. Системы неравенств первой степени

Чтобы решить систему неравенств первой степени, находим решение каждого неравенства в отдельности и сопоставляем эти решения. Это сопоставление либо дает решение системы, либо обнаруживает, что система не имеет решений.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$4x-3>5x-5;\ 2x+4<8x.$$

Решение первого неравенства есть $x<2$, решение второго есть $x>\frac{2}{3}$. Решение системы будет $\frac{2}{3}<x<2$.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$2x-3>3x-5;\ 2x+4>8x.$$

Решение первого неравенства $x<2$; решение второго $x<\frac{2}{3}$. Решение системы будет $x<\frac{2}{3}$ (при этом условии неравенство $x<2$ и подавно будет верным).

Пример 3. Решить систему неравенств

$$2x-3<3x-5;\ 2x+4>8x.$$

Решение первого неравенства $x>2$, решение второго $x<\frac{2}{3}$ Эти условия противоречат друг другу. Система не имеет решений.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$2x<16;\ 3x+1>4x-4;\ 3x+6>2x+7;\ x+5<2x+6.$$

Решения данных неравенств будут соответственно: $x<8$, $x<5$, $x>1$, $x>-1$. Сопоставляя эти условия, находим, что первые два можно заменить одним вторым, а третье и четвертое — одним третьим. Решение системы будет $1<x<5$.

§ 57. Простейшие неравенства второй степени с одним неизвестным

1) Неравенство $x^2<m$. (I)

а) Если $m>0$, то решение есть

$$-\sqrt{m}<x<\sqrt{m}. \qquad \text{(Ia)}$$

б) Если $m\leqslant 0$, то решения нет (квадрат действительного числа не может быть отрицательным).

2) Неравенство $x^2 > m$. (2)

а) Если $m > 0$, то неравенство (2) справедливо, во-первых, при всех значениях x, больших чем $\sqrt{m}$, и, во-вторых, при всех значениях x, меньших чем $-\sqrt{m}$.

$$x > \sqrt{m} \text{ или } x < -\sqrt{m}. \tag{2а}$$

б) Если $m = 0$, то неравенство (2) справедливо при всех x, кроме $x = 0$;

$$x > 0 \text{ или } x < 0. \tag{2б}$$

в) Если $m < 0$, то неравенство (2) тождественное.

Пример 1. Неравенство $x^2 < 9$ имеет решение $-3 < x < 3$.

Пример 2. Неравенство $x^2 < -9$ не имеет решений.

Пример 3. Неравенство $x^2 > 9$ имеет решением совокупность всех чисел, больших чем 3, и всех чисел, меньших чем -3.

Пример 4. Неравенство $x^2 > -9$ тождественно.

§ 58. Неравенства второй степени с одним неизвестным (общий случай)

Разделив неравенство второй степени на коэффициент при x^2, мы приведем его к одному из видов

$$x^2 + px + q < 0, \tag{1}$$
$$x^2 + px + q > 0. \tag{2}$$

Перенесем свободный член в правую часть и прибавим к обеим частям $\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Получим соответственно

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q, \tag{1'}$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q. \tag{2'}$$

Если обозначить $x + \frac{p}{2}$ через z, а $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ через m, то мы получим простейшие неравенства

$$z^2 < m, \tag{1''}$$
$$z^2 > m. \tag{2''}$$

Решение этих неравенств было дано в предыдущем параграфе. Зная его, найдем решение неравенства (1) или (2).

Пример 1. Решить неравенство $-2x^2+14x-20>0$. Разделив обе части на -2 (§ 53, п.3), найдем $x^2-7x+10<0$. Перенеся свободный член 10 вправо и прибавив к обеим частям $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, получим $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2<\frac{9}{4}$. Отсюда (§ 57, случай 1а)

$$-\frac{3}{2}<x-\frac{7}{2}<\frac{3}{2}.$$

Прибавляя $\frac{7}{2}$, находим $-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}<x<\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$, т. е.

$$2<x<5.$$

Пример 2. Решить неравенство $-2x^2+14x-20<0$. Выполнив те же преобразования, получим неравенство $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2>\frac{9}{4}$. Отсюда (§ 57, случай 2а) находим, что наше неравенство справедливо, во-первых, при $x-\frac{7}{2}>\frac{3}{2}$, т. е. при $x>5$, и, во-вторых, при $x-\frac{7}{2}<-\frac{3}{2}$, т. е. при $x<2$.

Пример 3. Решить неравенство $x^2+6x+15<0$. Перенося свободный член вправо и прибавляя к обеим частям $\left(\frac{6}{2}\right)^2$, т. е. 9, найдем $(x+3)^2<-6$. Это неравенство (§ 57, случай 1б) не имеет решений. Значит, не имеет *решений и данное неравенство.*

Пример 4. Решить неравенство $x^2+6x+15>0$. Как в примере 3, найдем $(x+3)^2>-6$. Это неравенство (§ 57, случай 2в) тождественное. Значит, и данное неравенство тождественное.

§ 59. Арифметическая прогрессия

Латинское слово «прогрессия» в переводе на русский язык означает «движение вперед»; этим термином в математике прежде именовали всякую последовательность чисел, построенную по такому закону, который позволяет неограниченно продолжать эту последовательность в одном направлении. Например, возводя последовательные целые числа в квадрат, получаем последовательность 1, 4, 9, 16, 25 и т. д.; следуя этому закону, можно неограниченно ее продолжить. Числа, составляющие эту последовательность, называются ее *членами*. В настоящее время термин «прогрессия» в этом широком смысле неупотребителен; вместо этого говорят просто *последовательность*. Но два простых и важных частных вида прогрессий — арифметическая и геометрическая — сохранили свое прежнее название.

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел, в которой разность между последующим и предыдущим членами остается неизменной. Эта неизменная разность называется *разностью прогрессии.*

Пример 1. Натуральный ряд чисел 1, 2, 3, 4, 5,... есть арифметическая прогрессия с разностью 1.

Пример 2. Последовательность чисел 10, 8, 6, 4, 2, 0, —2, —4,... есть арифметическая прогрессия с разностью —2.

Любой член арифметической прогрессии можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 + d\,(n-1)$$

(a_1 — первый член прогрессии; d — разность прогрессии; n — номер взятого члена).

Сумма первых n членов арифметической прогрессии выражается формулой

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}.$$

Пример 3. В прогрессии 12, 15, 18, 21, 24,... десятый член равен $a_{10} = 12 + 3\cdot 9 = 39$.

Сумма десяти первых членов равна

$$s_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})\,10}{2} = \frac{(12+39)\,10}{2} = 255.$$

Пример 4. Сумма всех целых чисел от 1 до 100 включительно равна $\frac{(1+100)\,100}{2} = 5050$.

§ 60. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, в которой отношение между последующим и предыдущим членами остается неизменным. Это неизменное отношение называется *знаменателем прогрессии.*

Пример 1. Числа 5, 10, 20, 40,... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Пример 2. Числа 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. — геометрическая прогрессия со знаменателем 0,1.

Геометрическая прогрессия называется ***возрастающей***, когда абсолютная величина ее знаменателя больше единицы (как в примере 1), и *убывающей*, когда она меньше единицы (как в примере 2).

Замечание. Знаменатель прогрессии может быть и отрицательным числом, но прогрессии с отрицательным знаменателем практического значения не имеют.

Любой член геометрической прогрессии можно вычислить по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{1}$$

(a_1 — первый член; q — знаменатель прогрессии; n — номер взятого члена).

Сумма первых n членов геометрической прогрессии (знаменатель которой не равен 1) выражается формулой

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}; \tag{2}$$

первое из выражений удобнее брать, когда прогрессия возрастающая, второе — когда она убывающая.

Если же $q = 1$, то прогрессия состоит из равных членов и вместо (2) имеем: $s_n = na_1$.

Пример 3. В геометрической прогрессии 5, 10, 20, 40,.. десятый член $a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 5 \cdot 512 = 2560$. Сумма десяти первых членов

$$s_{10} = \frac{a_{10} \cdot 2 - a_1}{2-1} = 5115.$$

Суммой бесконечно убывающей прогрессии называется число, к которому неограниченно приближается сумма первых n членов убывающей прогрессии при неограниченном возрастании числа n.

Сумма бесконечной убывающей прогрессии выражается формулой

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Пример 4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ $\left(a_1 = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}\right)$ равна $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, т. е. сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ при неограниченном возрастании n неограниченно приближается к числу 1.

§ 61. Отрицательные, нулевой и дробные показатели степени

Возведение в n-ю степень первоначально понималось как повторение некоторого числа сомножителем n раз. С этой точки зрения такие выражения, как 9^{-2} или $9^{1\frac{1}{2}}$, представляются бессмысленными, так как нельзя взять число 9 сомножителем «минус два» раза или $1\frac{1}{2}$ раза. Тем не менее в математике этим выражениям придают определенный смысл; именно 9^{-2} считают равным $\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$; $9^{1\frac{1}{2}}$ считают равным $\sqrt{9^3}=(\sqrt{9})^3=27$ и т.д. Здесь происходит то же обобщение понятия математического действия, какое совершается в математике постоянно; простейшим и самым ранним обобщением такого рода было обобщение действия умножения на случай дробного множителя (см. II, 20). Можно было бы вовсе не вводить ни дробных, ни отрицательных степеней. Но только тогда пришлось бы задачи одного и того же рода решать не по одному правилу, а с помощью множества различных правил. Задачи, о которых мы говорим, принадлежат почти все к высшей математике, поэтому многих конкретных примеров мы привести здесь не можем. Но одна из этих задач подробно изучается в элементарной математике — это логарифмирование (см. § 62). Заметим, что теория логарифмов, которая сейчас неразрывно связана с обобщением понятия степени, в течение целого столетия после ее открытия (на рубеже 16 и 17 веков) обходилась без дробного и отрицательного показателей степени; так же обстояло дело и с задачами высшей математики, о которых мы упоминали. Лишь в конце 17 века с усложнением и ростом числа *математических задач появилась настоятельная необходимость* в обобщении понятия степени; в этом направлении и пошли некоторые ученые; в окончательной форме это сделал Ньютон.

Определение отрицательной степени[1]. *Степень какого-либо числа с (целым) отрицательным показателем, по определению, есть единица, деленная на сте-*

---

[1]) Терминами «отрицательная степень», «нулевая степень» и «дробная степень» мы называем соответственно степени с отрицательным, нулевым и дробным показателями.

пень того же числа с положительным показателем, величина которого равна абсолютной величине отрицательного показателя, т. е.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Примеры. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 1 : \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{16}{9}$; $(-4)^{-3} = 1 : (-4)^3 = -\frac{1}{64}$ и т. д.

Равенство $a^{-m} = 1 : a^m$ остается справедливым как для положительного числа m, так и для отрицательного. Если, например, $m = -5$, то $-m$ будет равно $+5$, и наша формула будет иметь вид $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$, что согласуется с вышеприведенным определением.

Действия с отрицательными степенями подчиняются всем правилам, имеющим силу для положительных степеней. Более того, лишь после введения отрицательных степеней правила действий над положительными степенями приобретают всю общность.

Так, формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ (см. III, 25) теперь может быть применена не только к случаю $m > n$, но и к случаю $m < n$.

Пример. $a^5 : a^8 = a^{5-8} = a^{-3}$. Действительно, согласно определению $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, так что равенство $a^5 : a^8 = a^{-3}$ означает $\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3}$. Чтобы формула $a^m : a^n = a^{m-n}$ обладала общностью, нужно, чтобы она сохраняла силу и тогда, когда $m = n$; для этого примем следующее определение.

Определение нулевой степени. *Нулевая степень всякого числа, отличного от нуля, есть единица*[1].

Примеры. $3^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$; $a^5 : a^5 = a^0 = 1$.

Определение дробной степени. *Возвести число a* (действительное) *в степень $\frac{m}{n}$ — значит извлечь корень n-й степени из m-й степени числа a.* О дробных степенях комплексных чисел см. III, 48.

[1]) Выражение 0^0, как и выражение $\frac{0}{0}$ (II, 23), неопределенно.

Примеры. $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 27;$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{1\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^4} = \frac{16}{81};$$

$$3^{2\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{243} \approx 15{,}58.$$

Замечание 1. Основание a можно было бы брать и отрицательным, но тогда его дробные степени могут не быть действительными числами. Например,

$$(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}.$$

Корень $\sqrt[4]{-8}$ не может быть действительным числом. В элементарной математике обычно рассматриваются только положительные основания дробных степеней.

Замечание 2. Что касается самих показателей, то рассматриваются как положительные, так и отрицательные дробные показатели; отрицательные показатели не менее важны, чем положительные. Для овладения логарифмическими вычислениями совершенно необходимо на возможно большем числе упражнений четко усвоить смысл отрицательных и дробных показателей.

Примеры. $9^{-\frac{3}{2}} = 1 : 9^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27};$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-1\frac{2}{3}} = 1 : \left(\frac{8}{27}\right)^{1\frac{2}{3}} = \frac{243}{32};$$

$$3^{-2\frac{1}{2}} = 1 : 3^{2\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{243}} \approx 0{,}0642.$$

С введением дробных показателей правила действий над степенями не подвергаются никаким изменениям. Так, остается в силе формула $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ и др.

Пример. $a^{\frac{5}{7}} \cdot a^{-\frac{3}{7}} = a^{\frac{2}{7}}$. Действительно, $a^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{a^5}$; $a^{-\frac{3}{7}} = 1 : \sqrt[7]{a^3}$, $a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$, так что наша запись означает $\sqrt{a^5}\,\frac{1}{\sqrt[7]{a^3}} = \sqrt[7]{a^2}$, что верно (см. III, 26, правило 4).

§ 62. Сущность логарифмического метода; составление таблицы логарифмов

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня—действия, гораздо более трудоемкие, чем сложение и вычитание, особенно тогда, когда нужно производить действия с многозначными числами. Настоятельная потребность в таких действиях впервые возникла в 16 веке в связи с развитием дальнего мореплавания, вызвавшим усовершенствование астрономических наблюдений и вычислений. На почве астрономических расчетов и возникли на рубеже 16 и 17 веков логарифмические вычисления.

В настоящее время эти вычисления применяются повсюду, где приходится иметь дело с многозначными числами. Они выгодны уже при действиях с четырехзначными числами и совершенно необходимы в тех случаях, когда точность должна доходить до пятого знака. Бóльшая точность на практике требуется очень редко.

Ценность логарифмического метода состоит в том, что он сводит умножение и деление чисел к сложению и вычитанию—действиям менее трудоемким. Возведение в степень, извлечение корня, а также и ряд других вычислений (например, тригонометрических) также значительно упрощаются.

Выясним на примерах идею метода.

Пусть требуется помножить 10 000 на 100 000. Конечно, мы не станем выполнять этого действия по схеме умножения многозначных чисел. Мы просто сосчитаем число нулей в множимом (4) и множителе (5), сложим эти числа ($4+5=9$) и сразу напишем произведение 1 000 000 000 (9 нулей). Законность такого вычисления основана на том, что сомножители суть (целые) степени числа 10: множится 10^4 на 10^5; при этом показатели степеней складываются. Точно так же сокращенно выполняется и деление степеней десяти (деление заменяется вычитанием показателей). Но так можно делить и умножать лишь немногие числа; например, в пределах первого миллиона можно брать (не считая 1) лишь 6 чисел: 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000. Чисел, допускающих подобное умножение и деление, будет гораздо больше, если взять вместо основания 10 другое, более близкое к 1. Возьмем, например, основание 2 и составим таблицу его первых 12 степеней.

показатель степени (логарифм)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
степень (число)	*2*	*4*	*8*	*16*	*32*	*64*	*128*	*256*	*512*	*1024*	*2048*	*4096*

Числа, стоящие в верхней строке (показатели степеней), мы будем теперь называть *логарифмами*, а числа, стоящие в нижней строке (степени),—просто *числами*.

Чтобы перемножить какие-либо два числа нижней строки, достаточно сложить два числа, стоящих над ними. Например, чтобы найти произведение 32 и 64, сложим стоящие над 32 и над 64 числа 5 и 6; $5+6=11$. Под числом 11 находим результат: 2048. Чтобы разделить 4096 на 256, возьмем числа 12 и 8, стоящие над ними; вычитаем: $12-8=4$. Под числом 4 находим ответ: 16. Если продолжить таблицу влево, введя нулевую и отрицательную степени числа 2, то можно будет выполнять и деление меньших чисел на большие.

Хотя среди степеней числá 2 гораздо меньше пробелов, чем среди степеней числá 10, все же в нижней строке нашей таблицы нет очень многих чисел. Поэтому практического значения и эта таблица не может иметь. Но если за основание взять число, гораздо более близкое к 1, чем число 2, то этот дефект будет устранен.

Примем, например, за основание число 1,00001. В пределах между 1 и 100 000 окажется свыше миллиона (1 151 292) его последовательных степеней. Если мы округлим значения этих степеней, сохранив лишь шесть значащих цифр, то среди миллиона округленных результатов окажутся все целые числа от 1 до 100 000. Правда, это будут лишь приближенные значения степеней. Но так как при умножении и делении пятизначных целых чисел нас будут интересовать только первые пять знаков результата, то составленные таблицы позволят перемножать, делить и т. д. пятизначные целые числа, а следовательно, и десятичные дроби, имеющие пять значащих цифр.

Именно так и были составлены первые таблицы логарифмов [1]). Вычисление их потребовало многолетней неутомимой работы. В настоящее время методами высшей математики эту работу мог бы выполнить каждый в течение какого-нибудь месяца. Триста лет назад этому нужно было посвятить всю жизнь. Но зато во много раз возросла производительность труда многих тысяч вычислителей, пользовавшихся раз навсегда составленными таблицами.

---

[1]) Швейцарцем Бюрги (ок. 1590 г.); несколько позднее независимо от Бюрги были составлены таблицы логарифмов шотландцем Непером, который брал за основание число, очень близкое к единице, но меньшее чем единица. Бюрги опубликовал свою работу лишь в 1620 г., раньше (в 1614 г.) появились в свет таблицы Непера.

В настоящее время в таблицах логарифмов кладется в основание число 10, что дает ряд вычислительных преимуществ (так как наша нумерация — десятичная). При этом для получения целых чисел приходится брать *дробные* степени числа 10.

Логарифм некоторого числа при основании 10 называется его *десятичным логарифмом.* Составление таблицы десятичных логарифмов не представляет особых трудностей, если уже составлена таблица по основанию 1,00001. Действительно, пусть мы хотим найти десятичный логарифм числа 3, т. е. тот показатель степени, в которую нужно возвести 10, чтобы получить 3. Из таблицы по основанию 1,00001 мы найдем:

$$10 \approx 1{,}00001^{230\,258},$$
$$3 \approx 1{,}00001^{109\,861}.$$

Возведя обе части первого равенства в степень $\frac{1}{230\,258}$, найдем: $1{,}00001 \approx 10^{(1:\,230\,258)}$; поэтому второе равенство перепишется в виде $3 \approx 10^{(109\,861:\,230\,258)}$, т. е. десятичный логарифм числа 3 есть 0,47712. Подобным же образом можно найти десятичные логарифмы и остальных чисел [1]).

§ 63. Основные свойства логарифмов

Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени x, в которую нужно возвести a, чтобы получить число N.

Обозначение: $\log_a N = x$. Запись $\log_a N = x$ *совершенно равнозначна* записи $a^x = N$.

Примеры. $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$; $\log_{1/2} 16 = -4$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$; $\log_{1/2}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Из определения логарифма вытекает следующее тождество:

$$a^{\log_a N} = N.$$

---

[1]) Идея составления таблицы десятичных логарифмов принадлежит Неперу и его сотруднику англичанину Бриггу. Они совместно начали работу по пересчету прежних таблиц Непера на новое основание 10. После смерти Непера Бригг продолжил и закончил эту работу (он опубликовал ее полностью в 1624 г.). Поэтому десятичные логарифмы называются иначе *бригговыми.* Дробные степени в то время еще не были приняты в математике, но Непер и Бригг обходились без них, так как понятию логарифма они давали определение, несколько отличающееся от ныне принятого.

Примеры. $2^{\log_2 8}=8$, т. е. $2^3=8$; $5^{\log_5 25}=25$; $10^{\lg N}=N$ [1]).

Числа a (*основание логарифма*) и N (*число*) можно брать целыми и дробными (см. примеры), но непременно положительными, если мы хотим, чтобы логарифмы были *действительными* числами.

Сами же логарифмы могут быть и отрицательны; *отрицательные логарифмы столь же важны на практике, как положительные.*

Если за основание логарифмов взять число, большее единицы (например, число 10), то большее число имеет больший логарифм. Логарифмы чисел, бо́льших единицы, положительны, меньших единицы — отрицательны. Логарифм единицы при любом основании равен нулю. Логарифм числа, равного основанию, всегда есть 1 (в десятичных логарифмах $\lg 10=1$) [2]).

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log(ab)=\log a+\log b.$$

Логарифм частного равен логарифму делимого без логарифма делителя:

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания:

$$\log a^m=m\log a.$$

Логарифм корня равен частному от деления логарифма подкоренного числа на показатель корня:

$$\log\sqrt[m]{a}=\frac{\log a}{m}$$

(следствие предыдущего свойства, ибо $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$).

---

1) Знаком $\lg$ без указания основания обозначается десятичный логарифм; знаком $\log$ без указания основания—логарифм по произвольному основанию (в пределах одной формулы это основание мыслится одним и тем же).

2) Число a не должно равняться единице; иначе у чисел, не равных единице, совсем не будет логарифма, а для единицы всякое число будет логарифмом.

Предостережение. Логарифм суммы *не равен* сумме логарифмов; *нельзя* вместо $\log(a+b)$ писать $\log a + \log b$. Эта ошибка часто делается.

Прологарифмировать некоторое выражение — значит выразить его логарифм через логарифмы входящих в это выражение величин.

Примеры логарифмирования.

1) $\log\frac{2a^2b}{\sqrt[3]{m^2}} = \log(2a^2bm^{-2/3}) = \log 2 + 2\log a + \log b - \frac{2}{3}\log m$; 2) $x = \frac{14{,}352\cdot\sqrt{0{,}20600}}{185{,}06\cdot 43\,110^2}$; $\lg x = \lg 14{,}352 + \frac{1}{2}\lg 0{,}20600 - \lg 185{,}06 - 2\lg 43110$.

Имея таблицу десятичных логарифмов, найдем по ней $\lg 14{,}352$, $\lg 0{,}20600$ и т. д. и вычислим правую часть нашего равенства; это будет $\lg x$. После этого по таблице найдем число x по его логарифму. Подробнее см. III, 67—70.

§ 64. Натуральные логарифмы; число e

Для практического применения наиболее удобным основанием логарифмов является число 10. Но для теоретических исследований наиболее пригодно другое основание, именно иррациональное число $e = 2{,}718\,281\,83$ (с точностью до восьмого десятичного знака). Этот поразительный на первый взгляд факт полностью можно разъяснить только в высшей математике; здесь мы покажем лишь, откуда это число появляется. Оно находится в тесной связи с тем способом вычисления логарифмов, который был объяснен в § 62. Когда мы берем за основание число $1 + \frac{1}{n}$, близкое к единице, например 1,00001 ($n = 100\,000$), то для небольших чисел получаются огромные логарифмы, например число 3 имеет логарифм 109 861. Чтобы этот логарифм был величиной того же порядка, что и самое число 3, его следовало бы уменьшить в $n = 100\,000$ раз. Тогда он имел бы величину 1,09861. Число 3 будет иметь логарифм 1,09861, если за основание взять не

$$1 + \frac{1}{n} = 1{,}00001, \text{ а } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1{,}00001^{100\,000}.$$

Действительно, мы имеем:

$$3 = (1{,}00001)^{109\,861} = 1{,}00001^{100\,000\cdot 1{,}09861} = (1{,}00001^{100\,000})^{1{,}09861}.$$

Если мы вычислим величину $1{,}00001^{100\,000}$, то с точностью до восьмого десятичного знака найдем: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,267\,63$ ($n = 100\,000$). Это число уже очень близко к числу e; оно имеет одинаковые с числом e первые пять цифр. Если бы мы положили в основание не 1,00001, а еще более близкое к 1 число, например 1,000001, т. е. взяли бы $n = 1\,000\,000$, то, рассуждая так же, как прежде, нашли бы, что еще более удобным основанием будет:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1{,}000001^{1\,000\,000}$$

Это число с точностью до восьмого знака равно 2,718 280 47. Оно имеет те же первые шесть цифр, что число e, а в седьмой цифре разнится лишь на единицу. Чем больше взять число n, тем меньше число $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e. Иначе говоря, *число e есть предел, к которому стремится $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n*. Это и есть определение числа e.

Мы видели, что основание $1+\frac{1}{n}$, а значит, и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, тем точнее позволяет вычислить логарифмы всевозможных чисел, чем больше число n. Естественно ожидать, что наиболее удобным для той же цели будет предел, к которому стремится $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n, т. е. число e. Так и есть в действительности. Вычисление логарифмов по основанию e совершается быстрее, чем по всякому другому основанию. Способы этого вычисления излагаются в высшей математике.

Самое число e можно выразить десятичной дробью с любой степенью точности; в таблицах можно найти такие приближенные значения e, которые по своей точности превосходят любые практически возможные требования. С полной же точностью число e ни десятичной, ни другой рациональной дробью представить невозможно. Более того, число e не только иррационально, но и трансцендентно (см. III, 27).

Логарифмы, взятые по основанию e, называются *натуральными* логарифмами. Часто их называют (исторически неправильно) неперовыми [1]).

Обозначение. Вместо $\log_e x$ принято писать $\ln x$ (знак ln есть сокращение слов «логарифм натуральный»).

Пример. $\ln 3 = 1{,}09861$.

Чтобы по известному десятичному логарифму числа N найти его натуральный логарифм, нужно разделить десятичный логарифм числа N на десятичный логарифм числа e (последний равен 0,43429...):

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \approx \frac{\lg N}{0{,}43429} \approx 2{,}30259 \lg N.$$

Величина $\lg e = 0{,}43429$ называется *модулем десятичных логарифмов* и обозначается через M, так что

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N \text{ [2])}.$$

Пример. Из таблицы десятичных логарифмов имеем: $\lg 2 = 0{,}30103$. Отсюда

$$\ln 2 = \frac{1}{M} \cdot 0{,}30103 = 0{,}69315.$$

Чтобы по известному натуральному логарифму числа N найти его десятичный логарифм, нужно помножить натуральный логарифм на модуль десятичных логарифмов $M = \lg e$:

$$\lg N = \lg e \ln N = M \ln N \approx 0{,}43429 \ln N.$$

---

[1]) Основанием, которым фактически пользовался Непер, было число $1 - 0{,}000\,0001$. Если бы мы захотели все логарифмы таблицы Непера уменьшить в $10\,000\,000 = 10^7$ раз (ср. пример, разобранный выше), то за основание должны были бы взять число $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$, где $k = 10^7$, которое можно было бы условно назвать основанием таблицы Непера. Но это число отнюдь не равно числу e $\left(\text{оно очень мало отличается от числа } \frac{1}{e}\right)$.

[2]) Данные здесь правила перехода от натуральных логарифмов к десятичным и обратно представляют собой частные случаи общих формул

$$\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b; \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

позволяющих перейти от логарифма числа N по основанию b к логарифму того же числа по основанию a. Вторая формула при $N = b$ дает

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Пример. $\ln 3 = 1{,}09861$. Отсюда $\lg 3 = M \cdot 1{,}09861 = 0{,}47712$.

Для облегчения умножения на M и на $\frac{1}{M}$ составляются таблицы, содержащие произведения M и $\frac{1}{M}$ на все однозначные или на все двузначные множители. Здесь приводится таблица умножения M и $\frac{1}{M}$ на однозначные числа.

	Кратные M	Кратные $\frac{1}{M}$
1	0,43429	2,30259
2	0,86859	4,60517
3	1,30288	6,90776
4	1,73718	9,21034
5	2,17147	11,51293
6	2,60577	13,81551
7	3,04006	16,11810
8	3,47436	18,42068
9	3,90865	20,72327

§ 65. Десятичные логарифмы

В дальнейшем десятичный логарифм именуется просто логарифмом.

Логарифм единицы равен нулю.

Логарифмы чисел 10, 100, 1000 и т. д. равны 1, 2, 3 и т. д., т. е. имеют столько положительных единиц, сколько нулей стоит после единицы.

Логарифмы чисел 0,1; 0,01; 0,001 и т. д. равны -1, -2, -3 и т. д., т. е. имеют столько отрицательных единиц, сколько нулей стоит перед единицей (считая и нуль целых).

Логарифмы остальных чисел имеют дробную часть, именуемую *мантиссой*. Целая часть логарифма называется *характеристикой*.

Числа, бо́льшие единицы, имеют положительные логарифмы. Положительные числа, меньшие единицы [1]), имеют отрицательные логарифмы.

Например [2]), $\lg 0{,}5 = -0{,}30103$, $\lg 0{,}005 = -2{,}30103$.

---

[1]) Отрицательные числа вовсе не имеют действительных логарифмов.

[2]) Все дальнейшие равенства — приближенные с точностью до половины единицы последнего выписанного знака.

Отрицательные логарифмы для большего удобства нахождения логарифма по числу и числа по логарифму представляются не в вышеприведенной «естественной» форме, а в «искусственной». Отрицательный логарифм в искусственной форме *имеет положительную мантиссу и отрицательную характеристику.*

Например, $\lg 0{,}005 = \bar{3}{,}69897$. Эта запись означает, что $\lg 0{,}005 = -3 + 0{,}69897 = -2{,}30103$.

Чтобы перевести отрицательный логарифм из естественной формы в искусственную, нужно: 1) на единицу увеличить абсолютную величину его характеристики; 2) полученное число снабдить знаком минус сверху; 3) все цифры мантиссы, кроме последней из цифр, не равных нулю, вычитать из девяти; последнюю, не равную нулю цифру вычесть из десяти. Получаемые разности записываются на тех же местах мантиссы, где стояли вычитаемые цифры. *Нули на конце остаются нетронутыми.*

П р и м е р 1. $\lg 0{,}05 = -1{,}30103$ привести к искусственной форме: 1) абсолютную величину характеристики (1) увеличиваем на 1; получаем 2; 2) пишем характеристику искусственной формы в виде $\bar{2}$ и отделяем ее запятой; 3) вычитаем первую цифру мантиссы (3) из 9; получаем 6; записываем 6 на первом месте после запятой. Таким же образом на следующих местах появляются цифры $9\,(=9-0)$, $8\,(=9-1)$, $9\,(=9-0)$ и $7\,(=10-3)$. Имеем:

$$-1{,}30103 = \bar{2}{,}69897.$$

П р и м е р 2. $-0{,}18350$ представить в искусственной форме: 1) увеличиваем 0 на 1, получаем 1; 2) имеем $\bar{1}$; 3) вычитаем цифры 1, 8, 3 из 9; цифру 5 из 10; нуль на конце остается нетронутым. Имеем:

$$-0{,}18350 = \bar{1}{,}81650.$$

Чтобы перевести отрицательный логарифм из искусственной формы в естественную, нужно: 1) на единицу уменьшить абсолютную величину его характеристики; 2) полученное число снабдить знаком минус слева; 3) с цифрами мантиссы поступать, как в предыдущем случае.

П р и м е р 3. $\bar{4}{,}68900$ представить в естественной форме. 1) $4-1=3$; 2) имеем -3; 3) вычитаем цифры мантиссы 6, 8 из 9; цифру 9 из 10; два нуля остаются нетронутыми. Имеем:

$$\bar{4}{,}68900 = -3{,}31100.$$

§ 66. Действия с искусственными выражениями отрицательных логарифмов

При действиях с искусственными выражениями логарифмов нет необходимости предварительно переводить их в естественную форму; *при небольшом навыке в применении нижеперечисленных приемов можно с искусственными выражениями непосредственно производить все действия так же быстро, как с естественными.*

Сложение. Мантиссы складываются, как обычно; после сложения десятых долей может оказаться, что в уме удержится единица или несколько единиц; тогда при сложении характеристик (среди которых могут быть и положительные *и отрицательные*) *удержанное в уме число присчитывается к положительным характеристикам.*

Пример 1. $\bar{1},17350+2,88694+\bar{3},99206$.

Схема:

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 2\,2\,1\,1\,1} \\
\bar{1},17350 \\
+\ 2,88694 \\
\bar{3},99206 \\
\hline
0,05250
\end{array}
$$

Здесь при сложении десятых долей получено $2+1+8+9=20$ [1]. Нуль записан; 2 удержано в уме. Сложение характеристик дает $2+\bar{1}+2+\bar{3}=0$.

Пример 2.

$$
\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\quad 11} \\
+\ 2,7458 \\
\bar{4},3089 \\
\hline
\bar{1},0547
\end{array}
$$

Здесь при сложении характеристик имеем:

$$1+2+\bar{4}=\bar{1}.$$

Вычитание. Мантисса вычитаемого поразрядно вычитается из мантиссы уменьшаемого как в том случае, когда первая меньше второй, так и в обратном случае. В последнем случае для цифры десятых уменьшаемого занимаем положительную единицу из характеристики.

Пример 1.

$$
\begin{array}{r}
-\ \dot{\bar{2}},\dot{1}\dot{7}\dot{4}1 \\
\bar{5},1846 \\
\hline
2,9895
\end{array}
$$

При вычитании десятых долей пришлось занять положительную единицу из характеристики $\bar{2}$, отчего она стала равной $\bar{3}$. Вычитание характеристик дает $\bar{3}-\bar{5}=2$.

---

[1]) *Малые цифры сверху обозначают удержанные в уме цифры.*

Пример 2.
$$\begin{array}{r} \bar{1},\dot{2}080 \\ -\;3,1916 \\ \hline \bar{4},0164 \end{array}$$
Здесь не пришлось занимать из характеристики: $\bar{1}-3=\bar{4}$.

Пример 3.
$$\begin{array}{r} \dot{0},\dot{\bar{1}}265 \\ -\;1,9371 \\ \hline \bar{2},1894 \end{array}$$
Здесь видно, что и при вычитании положительного логарифма из положительного можно результат сразу же получить в искусственной форме. Так и рекомендуется поступать.

При *совместном сложении и вычитании* иногда предпочитают заменить все вычитания сложениями. При этом если вычитаемое было положительным числом, то соответствующее отрицательное слагаемое переводится в искусственную форму. Если же оно было отрицательным числом, заданным в искусственной форме, то его переводят в естественную форму и затем отбрасывают знак минус. (Полученные слагаемые называются *дополнениями*.)

Пример.
$$0,1535-\bar{1},1236+\bar{1},1686-4,3009=$$
$$=0,1535+\text{доп. }\bar{1},1236+\bar{1},1686+\text{доп. }4,3009=$$
$$=0,1535+0,8764+\bar{1},1686+\bar{5},6991=\bar{5},8976.$$

Запись:
$$\begin{array}{rl} 0,1535= & 0,1535 \\ -\bar{1},1236= & 0,8764 \\ +\bar{1},1686= & \bar{1},1686 \\ -4,3009= & \bar{5},6991 \\ \hline & \bar{5},8976 \end{array}$$

Умножение. При умножении искусственного логарифма на положительное число множим отдельно сначала мантиссу, затем характеристику; если множитель — однозначное число, то число положительных единиц, полученное от умножения мантиссы, тут же присчитывается к отрицательному произведению множителя на характеристику. Если множитель многозначный, доводим до конца умножение на мантиссу и прибавляем произведение множителя на характеристику.

Пример 1.
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 32\,64} \\ \bar{6},4397 \\ \times\qquad 7 \\ \hline \overline{39},0779 \end{array}$$

Пример 2.

$$\begin{array}{r} \times\ \bar{1}{,}4397 \\ 17 \\ \hline 4397 \\ 3078 \\ \hline 7{,}475 \\ -\ 17\phantom{{,}475} \\ \hline \overline{10}{,}475 \end{array}$$

(Пользуемся правилами сокращенного умножения; см. *II*, *41*.)

Если нужно умножить отрицательный логарифм в искусственной форме на отрицательное число, то лучше всего предварительно перевести логарифм из искусственной формы в естественную.

Деление. Если делитель — отрицательное или многозначное положительное число, то лучше всего перейти к естественной форме. Если делитель — однозначное положительное число, делимое оставляется в искусственной форме. Если характеристика делится нацело, то делят отдельно характеристику, затем мантиссу. Если характеристика нацело не делится, к ней прибавляется в уме такое наименьшее число отрицательных единиц, чтобы получившееся число делилось нацело; к мантиссе прибавляют в уме столько же положительных единиц.

Пример. $\bar{2}{,}5638:6=\bar{1}{,}7606$. Чтобы характеристика делилась на 6, прибавляем 4 отрицательные единицы. Получившееся число —6 при делении на 6 дает —1. При делении же мантиссы добавляем к ней 4 положительные единицы и делим 4,5638 на 6.

§ 67. Отыскание логарифма по числу

Логарифмы целых степеней числа 10 отыскиваются без таблиц (III, 65). Для отыскания логарифмов остальных чисел поступаем так:

А) *Отыскание характеристики.* Для чисел, бóльших единицы, характеристика равна на единицу уменьшенному числу цифр целой части.

Примеры. $\lg 35{,}28=1,\ldots$; $\lg 3{,}528=0,\ldots$; $\lg 60\,100=4,\ldots$

(Точки после запятой означают, что здесь должны стоять цифры мантиссы.)

Для чисел, меньших единицы, характеристика искусственной формы логарифма равна числу нулей перед значащими цифрами числа (считая и нуль целых).

Примеры. $\lg 0{,}00635 = \bar{3},\ldots$; $\lg 0{,}1002 = \bar{1},\ldots$; $\lg 0{,}06004 = \bar{2},\ldots$

Б) *Отыскание мантиссы.* При отыскании мантиссы десятичной дроби, правильной или неправильной, отбрасываем запятую и ищем в таблице мантиссу получившегося целого числа; при отыскании мантиссы целого числа можно отбросить все нули в конце его (если таковые имеются). Например, мантисса числа 20,73 равна мантиссе числа 2073; мантисса числа 6 004 800 равна мантиссе числа 60048.

При пользовании четырехзначными таблицами логарифмов у полученного целого числа оставляем только четыре первых знака; при пользовании пятизначными таблицами — первые пять. Остальные отбрасываются, так как они не повлияют (или почти не повлияют) на содержащиеся в таблице разряды мантиссы.

По четырехзначной таблице можно найти непосредственно мантиссу трехзначного числа; по пятизначной — мантиссу четырехзначного числа. Мантиссы четырехзначных (пятизначных) чисел находятся прибавлением поправки (см. нижеприводимые примеры).

Четырехзначная таблица — см. стр. 18—22.

Пример 1. Найти логарифм числа 45,8. Находим (без таблицы) характеристику: 1,... Отбрасывая запятую, имеем целое число $N = 458$. Берем первые две его цифры (45). В строке 45 отыскиваем число, стоящее в столбце 8. Находим 6609. Это — мантисса. Имеем $\lg 45{,}8 = 1{,}6609$.

Пример 2. Найти $\lg 0{,}02647$. Находим (без таблицы) характеристику: $\bar{2},\ldots$ Отбрасываем запятую, получаем число 2647. Берем первые его две цифры (26); в строке 26 отыскиваем число, стоящее в столбце 4 (третья цифра данного числа). Находим 4216. Это — мантисса $\lg 264$. Находим поправку, соответствующую последней цифре 7 данного числа. Она помещается в той же строке 26, в столбце 7 раздела «поправки». Находим 11. Прибавляем поправку к ранее найденной мантиссе. Получаем $4216 + 11 = 4227$. Это — мантисса данного числа. Имеем $\lg 0{,}02647 = \bar{2}{,}4227$.

Запись:

$$\begin{array}{lcl} \lg 0{,}0264 & = & \bar{2}{,}4216 \\ \qquad\quad\;\; 7 & & \quad + 11 \\ \hline \lg 0{,}02647 & = & \bar{2}{,}4227 \end{array}$$

Замечание. Поправки рассчитаны с помощью интерполяции (см. II, 50); применение интерполяции облегчает работу вычислителя. Из таблицы видно, что мантисса числа 2640 меньше мантиссы числа 2650 на $4232 - 4216 = 16$ (десятичных долей). Разности чисел 10 отвечает разность мантисс 16. Пропорциональный расчет дает:

$$x : 16 = 7 : 10 = 0{,}7; \qquad x = 16 \cdot 0{,}7 = 11.$$

Пятизначная таблица[1]).

Пример 1. Найти $\lg 0{,}02647$. Находим без таблиц характеристику $\lg 0{,}02647 = \bar{2}, \ldots$ Отбрасывая запятую, получаем число 2647. Открываем ту страницу, где есть строка 264. В строке 264 отыскиваем число, стоящее в столбце 7. Находим 275. Это — три последние цифры мантиссы. Первые две (42) находим в начале строки. Вся мантисса 42275; $\lg 0{,}02647 = \bar{2}{,}42275$.

Для большинства строк вначале первые две цифры не проставлены. Тогда нужно взять первые две цифры либо из следующей нижней (если перед последними тремя цифрами мантиссы стоит звездочка), либо (если звездочки нет) из ближайшей верхней.

Пример 2. Найти $\lg 6764$. Характеристика есть 3. В строке 676 таблицы логарифмов отыскиваем в столбце 4 три последние цифры мантиссы 020. Они снабжены звездочкой. Поэтому первые две цифры (83) берем из нижележащей строки 677. Вся мантисса 83020; $\lg 6764 = 3{,}83020$.

Пример 3. Найти $\lg 6{,}6094$. Находим характеристику: $\lg 6{,}6094 = 0, \ldots$ Отбрасываем запятую, получаем 66094. В строке 660 (соответствующей первым трем цифрам) отыскиваем в столбце 9 (четвертая цифра) число 014 со звездочкой слева. Это — последние три цифры мантиссы числа 6609. Первые две (82) находим в следующей строке. Мантисса $\lg 6609$ есть 82014. Находим поправку, соответствующую последней цифре 4 данного числа. В столбце *PP* помещена табличка с надписью 6 ($d = 6$ есть разность между мантиссами чисел 6609 и 6610). В левой части этой таблички отыскиваем число 4. Против него стоит 2,4. Отбрасывая десятые доли, округляем это число до 2. Это — поправка. Прибавляя ее к ранее найденной мантиссе, получаем $82014 + 2 = 82016$. $\lg 6{,}6094 = 0{,}82016$.

Запись:

$$\begin{array}{r}
\lg 6{,}609 = 0{,}82014 \\
4 \quad\;\; + \;\; 2 \\
\hline
\lg 6{,}6094 = 0{,}82016
\end{array}$$

[1]) Например, распространенные таблицы логарифмов Пржевальского.

§ 68. Отыскание числа по логарифму[1])

Сначала, не обращая внимания на характеристику, отыскиваем в таблице данную мантиссу или мантиссу, ближайшую к данной. По ней находится некоторое целое число (в первом случае непосредственно; во втором — с помощью поправки, см. примеры). После этого принимают во внимание данную характеристику. Если она равна нулю или положительна, то в целую часть выделяется число цифр, на единицу большее, чем число единиц характеристики (если понадобится, в конце числа можно приписать сколько нужно нулей). Если характеристика отрицательна, то перед найденным числом ставится столько нулей, сколько в характеристике отрицательных единиц; стоящий слева нуль отделяется от остальной части запятой. Найденное таким образом число соответствует данному логарифму.

Четырехзначная таблица — см. стр. 18—22.

Пример 1. Найти число, логарифм которого равен 3,4683 (т. е. число $10^{3,4683}$). Сначала отыскиваем в таблице мантиссу 4683 или ближайшую к ней. Пробегая глазами один из столбцов таблицы, например столбец 0, ищем в нем число, первые две цифры которого составляют 46 или близкое к 46 число. Такое число (4624) мы найдем в строке 29. Вблизи от этого места ищем мантиссу 4683; находим ее в той же строке 29, в столбце 4. Значит, число, имеющее мантиссой 4683, есть 294. Так как характеристика 3 положительна, то в целую часть числа выделяем $3+1=4$ цифры. Для этого в конце числа 294 приписываем нуль. Имеем $3,4683=\lg 2940$.

Пример 2. Найти число, логарифм которого равен $\bar{3},3916$. Поступая, как в предыдущем примере, мы не найдем самого числа 3916 среди мантисс, но найдем ближайшее к нему число 3909, стоящее на пересечении строки 24 и столбца 6. Мантиссе 3909 соответствует, таким образом, число 246; оно дает первые три значащие цифры искомого числа. Четвертую цифру находим, вычисляя поправку. Данная нам мантисса 3916 превосходит табличную 3909 на 7. Ищем эту цифру *на той же строке* 24 в разделе «поправки». Она стоит в столбце 4. Цифра 4 есть четвертая значащая цифра искомого числа; число, имеющее мантис-

[1]) При отыскании числа по четырехзначному логарифму есть смысл пользоваться таблицей антилогарифмов (см. III, 69). При вычислениях на пять знаков нецелесообразно удваивать объем таблицы логарифмов присоединением к ней таблицы антилогарифмов.

сой 3916, есть 2464. Принимаем во внимание характеристику. Так как она отрицательна и содержит три единицы, то перед найденным числом ставим три нуля и стоящий слева нуль отделяем запятой. Имеем: $\lg 0{,}002464 = \bar{3}{,}3916$.

З а п и с ь:

$$\begin{array}{lll} \lg x = \bar{3}{,}3916 & & \\ \quad\quad\; 3909 & \lg 246 & \\ \quad\quad\; \underline{+\,7} & \underline{\quad\quad 4;} & \qquad x = 0{,}002464. \\ \quad\quad\; 3916 & \lg 2464 & \end{array}$$

З а м е ч а н и е 1. Следует твердо помнить, что при отыскании числа по логарифму поправка этого числа *приписывается* к нему, а не прибавляется к его последней цифре.

З а м е ч а н и е 2. Не следует забывать, что величина поправки должна разыскиваться в той же строке, где содержится число, близкое к мантиссе. Если в этой строке нет той поправки мантиссы, которая нужна, берем ближайшую поправку.

Пятизначная таблица (см. подстр. прим. на стр. 245).

П р и м е р 1. Найти число, логарифм которого равен $\bar{2}{,}43377$. Перелистывая таблицу, следим за выделяющимися первыми двумя цифрами мантисс (которые дают все время возрастающие числа). Найдя 43, ищем вблизи последние три цифры 377. Эти цифры найдутся на пересечении строки 271 и столбца 5. Число, имеющее мантиссой 43377, есть 2715. Принимая во внимание характеристику ($\bar{2}$), имеем $\bar{2}{,}43377 = \lg 0{,}02715$.

З а м е ч а н и е. По большей части последние три цифры мантиссы найдутся либо в той же строке, где стоят первые две, либо в одной из нижележащих; возможен, однако, случай, когда последние три цифры стоят в ближайшей вышележащей строке, тогда перед ними стоит звездочка.

П р и м е р 2. Найти число, логарифм которого равен 0,14185. Поступая так, как в предыдущем примере, мы среди мантисс не найдем 14185, но найдем ближайшее к нему число 14176; три последние цифры мантиссы (176) стоят выше, чем первые две; поэтому перед ними находим звездочку. Мантиссе 14176, стоящей на пересечении строки 138 и столбца 6, соответствует число 1386; оно дает первые четыре цифры искомого числа. Пятая цифра вычисляется с помощью поправки. Данная нам мантисса превосходит табличную на $185 - 176 = 9$. Разность же между двумя ближайшими табличными мантиссами есть $208 - 176 = 32$.

В столбце *PP* находим табличку с надписью 32. В ней *справа* отыскиваем число, ближайшее к 9; находим 9,6. Против него стоит 3. Цифра эта есть пятая значащая цифра искомого числа; число, имеющее мантиссой 14185, есть 13863. Принимая во внимание характеристику, имеем $0{,}14185 = \lg 1{,}3863$.

Запись:

$$\begin{array}{ll} \lg x = 0{,}14185 & \\ \quad 14\,176 & 1\,386 \\ \quad +9 & \quad\; 3; \\ \hline \quad 14\,185 & 1\,3863 \end{array} \qquad x = 1{,}3863.$$

Замечание. Следует помнить, что при отыскании числа по логарифму поправка *приписывается* к нему, а не прибавляется к последней цифре.

§ 69. Таблица антилогарифмов

Так называемая таблица антилогарифмов (стр. 23—27) — это та же таблица логарифмов, но с иным расположением материала, облегчающим разыскание числа по данному логарифму. В таблице даны (жирными цифрами) только мантиссы (обозначение m). По мантиссе, имеющей три десятичных знака, в таблице сразу находим некоторое целое число; если в мантиссе четыре десятичных знака, это число находится с помощью поправки (см. примеры). После этого принимают во внимание данную характеристику Если она равна нулю или положительна, то в целую часть выделяется число цифр, на единицу большее, чем число единиц характеристики (если понадобится, в конце числа можно приписать сколько нужно нулей). Если характеристика отрицательна, то перед найденным числом ставится столько нулей, сколько в характеристике единиц; стоящий слева нуль отделяется от остальной части запятой. Найденное таким образом число соответствует данному логарифму.

Пример 1. Найти число, логарифм которого равен 2,732 (т. е. число $10^{2,732}$). Отбрасываем характеристику и берем первые две цифры мантиссы (73). В строке 73 отыскиваем число, стоящее в столбце 2. Находим 5395. Так как характеристика 2 положительна, то в целую часть выделяем $2+1=3$ цифры. Имеем $10^{2,732} = 539{,}5$.

Пример 2. Дано $\lg x = \bar{3}{,}2758$. Найти x. Отбрасываем характеристику. В строке 27 ищем число, стоящее в столбце 5. Находим 1884. Находим поправку, соответствующую последней цифре 8 раздела «поправки». Находим 3. Прибавляем поправку к ранее найденному числу. Получаем $1884 + 3 = 1887$. Принимаем во внимание характеристику. Так как она отрицательна и содержит три единицы, то перед числом 1887 ставим три нуля и стоящий слева нуль отделяем запятой. Имеем:

$$x = 0{,}001887, \quad \text{т. е.} \quad \lg 0{,}001887 = \bar{3}{,}2758.$$

Запись:

$$\begin{array}{lcr} & \lg x = \bar{3}{,}2758 & \\ 275 & & 1\,884 \\ 8 & + & 3 \\ \hline 2758 & & 1\,887 \\ & x = 0{,}001887. & \end{array}$$

Пример 3.

$$\begin{array}{lcr} & \lg x = 0{,}0817.\ \text{Найти } x & \\ 081 & & 1\,205 \\ 7 & + & 2 \\ \hline 0817 & & 1\,207 \\ & x = 1{,}207. & \end{array}$$

Замечание. При отыскании числа по логарифму с помощью таблицы антилогарифмов поправка всегда *прибавляется* к последней цифре (а не приписывается к ней).

§ 70. Примеры логарифмических вычислений

Пример 1. Вычислить $u = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, где $a = 4{,}352$, $b = 1{,}800$.

1) Логарифмируем:

$$\lg u = \lg \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \lg \frac{ab}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} =$$
$$= \lg a + \lg b - \frac{1}{2}[\lg(a+b) + \lg(a-b)].$$

2) Находим $a + b$ и $a - b$:

$$\begin{array}{r} a = 4{,}352 \\ + \\ b = 1{,}800 \\ \hline a+b = 6{,}152 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a = 4{,}352 \\ - \\ b = 1{,}800 \\ \hline a-b = 2{,}552 \end{array}$$

3) Вычисляем сначала $\lg a + \lg b$, затем $\frac{1}{2}[\lg(a+b) + \lg(a-b)]$:

$$\begin{array}{r} \lg a = \lg 4{,}352 = 0{,}6387 \\ \lg b = \lg 1{,}800 = 0{,}2553 \\ \hline \lg a + \lg b = 0{,}8940 \\ \lg(a+b) = \lg 6{,}152 = 0{,}7890 \\ \lg(a-b) = \lg 2{,}552 = 0{,}4068 \\ \hline \lg(a+b) + \lg(a-b) = 1{,}1958 \\ \frac{1}{2}[\lg(a+b) + \lg(a-b)] = 0{,}5979 \end{array}$$

4) Находим $\lg u$ и затем u:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 0{,}8940 \\ 0{,}5979 \end{array} \\ \lg u = \overline{0{,}2961};\ u = 1{,}977. \end{array}$$

Пример 2. Вычислить $P = pe^{-\frac{k}{p}h}$, где $p = 10{,}33$, $k = 0{,}00129$, $h = 1000$; e — основание натуральных логарифмов ($e \approx 2{,}7183$).

1) $\lg P = \lg p - \frac{k}{p} h \lg e = \lg p - \frac{k}{p} hM$, где $M = \lg e \approx \approx 0{,}4343$ (модуль десятичных логарифмов; см. III, 64).

2) Находим $\lg p$:

$$\lg p = \lg 10{,}33 = 1{,}0141.$$

3) Логарифмируем выражение $\frac{k}{p} hM$:

$$\lg \frac{k}{p} hM = \lg k + \lg h + \lg M - \lg p.$$

4) Вычисляем полученное выражение логарифма:

$$\begin{array}{rl} \lg\ k = \lg 0{,}00129 & = \bar{3}{,}1106 \\ \lg\ h = \lg 1000 & = 3{,}0000 \\ \lg M = \lg 0{,}4343 & = \bar{1}{,}6378 \\ \text{доп. } \lg\ p = \text{доп. } \lg\ 10{,}33 & = \bar{2}{,}9859 \\ \hline \lg \frac{k}{p} hM & = \bar{2}{,}7343 \end{array}$$

Отсюда $\frac{k}{p} hM = 0{,}05424$.

5) Вычисляем $\lg P$ (см. п. 1) и затем P:

$$\begin{array}{r} -\;\lg p = 1{,}0141 \\ \frac{k}{p} hM = 0{,}0542 \\ \hline \lg P = 0{,}9599, \end{array}$$ откуда $P = 9{,}113$.

§ 71. Соединения

Общим именем соединений принято обозначать следующие три типа комбинаций, составляемых из некоторого числа различных между собой предметов (элементов).

1. Перестановки. Возьмем m различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$; будем переставлять эти элементы всевозможными способами, оставляя неизменным их число и меняя лишь их порядок. Каждая из получающихся таким образом комбинаций (в том числе и первоначальная) носит название *перестановки*. Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m. Это число равно произведению всех целых чисел от 1 (или, что то же, от 2) до m включительно:

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)\, m = m! \qquad (1)$$

Символ $m!$ (читается: *«эм факториал»*) есть сокращенное обозначение произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)\, m$.

Пример 1. Найти число перестановок из трех элементов a, b, c. Имеем $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Действительно, имеем 6 перестановок:

1) abc; 2) acb; 3) bac; 4) bca; 5) cab; 6) cba.

Пример 2. Сколькими способами можно распределить пять должностей между пятью лицами, избранными в президиум спортивного общества? Если составить в некотором порядке список должностей и против каждой должности писать фамилию кандидатов, то каждому распределению отвечает некоторая «перестановка». Общее число этих перестановок $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Замечание. При $m = 1$ в выражении $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ остается одно число 1. Поэтому принимается (в качестве определения), что $1! = 1$. При $m = 0$ выражение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ вовсе лишается смысла. Однако принимается (в качестве определения), что $0! = 1$. Ниже (п. 3) выясняется основание для этого соглашения.

2. Размещения. Будем составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые n элементов в различном порядке. Получающиеся при этом комбинации называются *размещениями* из m элементов по n. Общее число размещений из m элементов по n обозначается A_m^n. Это число равно произведению n последовательных целых чисел, из которых наибольшее равно m:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]. \tag{2}$$

Пример 1. Найти число размещений из четырех элементов $abcd$ по два. Имеем: $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; эти размещения следующие:

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ ad,\ da,\ bc,\ cb,\ bd,\ db,\ cd,\ dc.$$

Пример 2. В президиум собрания избраны восемь человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, секретаря и счетчика? Искомое число есть число размещений из 8 элементов по 3; $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Замечание. Перестановки можно считать частным случаем размещений (именно размещениями из m элементов по m).

3. Сочетания. Из m различных элементов будем составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе. Получающиеся при этом комбинации называются *сочетаниями* из m элементов по n.

Общее число различных между собой сочетаний обозначается C_m^n. Это число (оно, конечно, целое) можно представить формулой [1] (ср. п. 1):

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \tag{3}$$

В качестве определения принимается, что $C_m^0 = 1$ [это значение получается из (3)].

Выражение $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ часто обозначают сокращенно $\binom{m}{n}$.

Очевидно, что $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, т. е. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

[1]) Из m элементов можно составить только одно сочетание, содержащее все m элементов, так что $C_m^m = 1$. Формула (3) дает это значение только в том случае, если принять $0!$ за 1.

Для вычислений часто удобнее пользоваться другими выражениями числа сочетаний, именно

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\ldots n}$$

или

$$C_m^n = \frac{A_m^{m-n}}{P_{m-n}} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots(m-n)}.$$

Пример 1. Найти все сочетания из пяти элементов *abcde* по три. Имеем: $C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$; эти десять сочетаний следующие:

abc, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*.

Пример 2. Из восьми намеченных кандидатов нужно избрать трех счетчиков. Сколькими способами можно это сделать? Так как обязанности каждого счетчика одинаковы, то в отличие от примера 2 предыдущего пункта мы имеем не размещения, а сочетания. Искомое число есть

$$C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Кроме рассмотренных выше комбинаций, в математике рассматривается много других. Одним из наиболее важных типов комбинаций являются *перестановки с повторяющимися элементами*, определяемые следующим образом. Возьмем m элементов, среди которых имеется m_1 одинаковых между собой элементов первого рода, m_2 одинаковых между собой элементов второго рода и т. д. Будем переставлять их всевозможными способами. Получающиеся комбинации носят название *перестановок с повторяющимися элементами*. Число различных между собой перестановок с повторяющимися элементами равно

$$\frac{P_m}{P_{m_1}P_{m_2}\ldots P_{m_k}} \quad \text{или} \quad \frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

($m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m$; k — число родов).

Пример 1. Найти число различных перестановок с повторяющимися элементами из букв *aaabbcc*. Переставляя первую букву на место второй, а вторую на место первой, мы не получим новой комбинации. Точно так же, меняя местами четвертую и пятую буквы и в целом ряде других случаев, мы новых комбинаций не получаем. Но комбинации *abaabcc*, *caabcb* и ряд других — новые. В этом примере $m_1=3$, $m_2=2$, $m_3=2$; $m=m_1+m_2+m_3=7$. Число различных между собой перестановок равно

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!}=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot3\cdot2\cdot2}=210.$$

Пример 2. Найти число различных между собой перестановок из знаков $++++---$. Здесь $m_1=4$, $m_2=3$; $m=m_1+m_2=7$. Искомое число равно $\frac{7!}{4!\,3!}=35$.

Из последнего примера легко видеть, что число перестановок из m элементов, среди которых повторяются m_1 элементов первого и m_2 элементов второго рода, равно числу сочетаний из m элементов по m_1 или числу сочетаний из m элементов по m_2. Действительно, каждой перестановке соответствует один и только один подбор номеров мест, на которых стоят знаки $+$. Так, в перестановке $++--+-+$ знаки $+$ стоят на 1, 2, 5 и 7 месте, так что ей соответствует сочетание 1, 2, 5, 7. Значит, перестановок столько же, сколько различных сочетаний из семи номеров по четыре.

§ 72. Бином Ньютона

Биномом Ньютона называют формулу, представляющую выражение $(a+b)^n$ при целом положительном n в виде многочлена [1]).

Упомянутая формула для целого положительного n имеет вид:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+$$
$$+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n \qquad (1)$$

---

[1]) Название это вдвойне неправильно, так как, во-первых, $(a+b)^n$ не есть бином («бином» означает «двучлен»), во-вторых, разложение $(a+b)^n$ для целых положительных n было известно и до Ньютона. Ньютону же принадлежит смелая и необычайно плодотворная мысль распространить это разложение на случай n отрицательного и дробного.

или, что то же (ср. стр. 252),

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}a^{n-1}b + \\ + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \ldots\text{[1]}. \qquad (2)$$

Для вычислений удобнее всего формула

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n. \qquad (3)$$

Пример 1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Пример 2. $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$.

Числа 1, n, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д. называются *биномиальными коэффициентами*. Их можно получить, пользуясь только сложением, следующим образом. В верхней строке пишутся две единицы. Все следующие строки начинаются и кончаются единицей. Промежуточные же числа получаются сложением соседних чисел вышестоящей строки. Так, число 2 во второй строке получается сложением двух единиц первой строки; третья строка получается из второй: $1+2=3$; $2+1=3$; четвертая получается из третьей: $1+3=4$; $3+3=6$; $3+1=4$ и т. д. Числа, стоящие в одной строке, являются биномиальными коэффициентами соответствующей степени. Приведенная здесь схема называется *треугольником Паскаля:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

---

[1]) Сообразно с этим полагают $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, а также $0! = 1$ (см. замечание на стр. 251). При этом соглашении первому и последнему членам разложения можно придать тот же вид, что и остальным.

Бином Ньютона для дробных и отрицательных показателей

Пусть имеем выражение $(a+b)^n$, где n — дробное или отрицательное число. Пусть $|a|>|b|$. Представим $(a+b)^n$ в виде $a^n(1+x)^n$. Величина $x=\frac{b}{a}$; абсолютное ее значение меньше единицы. Выражение $(1+x)^n$ можно вычислить с любой степенью точности по формуле (3).

Пример 1. $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$. Здесь $n=-1$.

Так как $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{(-1)\cdot(-2)}{1\cdot 2}=1$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=$ $=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}=-1$ и т. д., то имеем $(1+x)^{-1}=$ $=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$

Число членов правой части бесконечно велико, но при $|x|<1$ сумма членов при неограниченном возрастании их числа стремится к пределу $\frac{1}{1+x}$ (выражение, стоящее в правой части, если $|x|<1$, есть бесконечная убывающая геометрическая прогрессия).

Пример 2. Вычислить $\sqrt{1,06}$ с точностью до пятого десятичного знака.

Представляем $\sqrt{1,06}$ в виде $(1+0,06)^{\frac{1}{2}}$ и применяем формулу (3):

$$(1+0,06)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot 0,06+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot 0,06^2+$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0,06^3+\ldots=$$
$$=1+0,03-0,00045+0,0000135-\ldots$$

Следующие члены не влияют на первые пять знаков. Поэтому, суммируя выписанные четыре слагаемых, имеем:

$$\sqrt{1,06}\approx 1,02956.$$

Пример 3. Найти пять значащих цифр числа $\sqrt[3]{130}$.
Ближайший к 130 куб целого числа есть $125=5^3$. Представляем $\sqrt[3]{130}$ в виде $(125+5)^{1/3}=125^{1/3}(1+0,04)^{1/3}=$ $=5(1+0,04)^{1/3}$. Вычисление ведем на семь знаков (учиты-

вая, что погрешность накопляется при сложении и затем увеличивается в 5 раз):

$$(1+0{,}04)^{1/3}=1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot 0{,}04^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}04^3+\ldots=$$

$$=1+0{,}0133333-0{,}0001778+0{,}0000040-\ldots=1{,}0131595.$$

Отброшенные слагаемые на седьмой знак не влияют. Находим $5\cdot 1{,}0131595=5{,}0657975$. С точностью до пятого знака имеем $\sqrt[3]{130}=5{,}06580$. Более точное вычисление (с учетом следующего слагаемого) даст 5,0657970, где все знаки верны.

Этим приемом можно извлекать корни любых степеней из произвольных чисел наиболее быстрым и точным способом.

Обобщенная формула бинома Ньютона

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}$$

(n — целое положительное число).

Символ $\sum$ означает, что нужно взять сумму всевозможных слагаемых вида

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k},$$

где n есть данный показатель степени, а $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — произвольные целые числа или нули, сумма которых равна n. *Число* 0! *принимается равным* 1.

Пример.

$$(a+b+c+d)^3=\sum\frac{3!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}d^{n_4};$$

число $n=3$ можно представить в виде суммы $k=4$ целых слагаемых следующими способами:

$$3=3+0+0+0,$$
$$3=2+1+0+0,$$
$$3=1+1+1+0.$$

Сообразно с этим будем иметь:

$$(a+b+c+d)^3=$$
$$=\frac{3!}{3!\,0!\,0!\,0!}(a^3b^0c^0d^0+a^0b^3c^0d^0+a^0b^0c^3d^0+a^0b^0c^0d^3)+$$
$$+\frac{3!}{2!\,1!\,0!\,0!}(a^2bc^0d^0+ab^2c^0d^0+a^2b^0cd^0+ab^0c^2d^0+\ldots)+$$
$$+\frac{3!}{1!\,1!\,1!\,0!}(abcd^0+abc^0d+ab^0cd+a^0bcd)=$$
$$=a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+a^2d+$$
$$+ad^2+b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2)+$$
$$+6(abc+abd+acd+bcd).$$

Свойства коэффициентов бинома Ньютона

1. Коэффициенты членов, равноудаленных от концов разложения, одинаковы.

Например, в разложении

$$(a+b)^6=$$
$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

коэффициенты второго и предпоследнего членов равны 6; коэффициенты третьего от начала и третьего от конца равны 15.

2. Сумма коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна 2^n. Например, в предшествующем разложении

$$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6.$$

3. Сумма коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов членов, стоящих на четных местах. Каждая из них составляет 2^{n-1}; например, в разложении $(a+b)^6$ сумма коэффициентов 1-го, 3-го, 5-го и 7-го членов равна сумме коэффициентов 2-го, 4-го и 6-го членов:

$$1+15+15+1=6+20+6=32=2^5.$$

IV. ГЕОМЕТРИЯ

А. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

1. *Через данную точку C провести прямую, параллельную данной прямой AB.*

Произвольным раствором циркуля проводим окружность (рис. 22) с центром C так, чтобы она пересекла AB. Тем же раствором циркуля от одной из точек пересечения M откладываем на AB в любую ее сторону отрезок MN. Снова тем же раствором засекаем из точки N дугу ab. Точку P пересечения дуги ab с окружностью соединяем с данной точкой C. PC — *искомая прямая.*

2. *Разделить данный отрезок AB пополам.*

Из концов отрезка A и B (рис. 23) одним и тем же произвольным (бо́льшим $^1/_2$ AB) раствором циркуля опи-

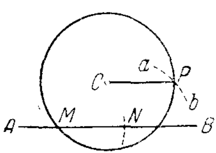


Рис. 22.

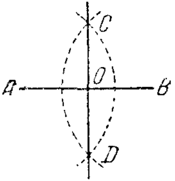


Рис. 23.

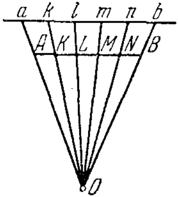


Рис. 24.

сываем две дуги. Точки их пересечения C и D соединяем прямой. Точка пересечения O прямых AB и CD есть середина отрезка AB.

3. *Разделить данный отрезок AB на данное число равных частей.*

Проводим (рис. 24) прямую ab, параллельную AB; на ней откладываем равные отрезки произвольной длины в нужном числе, например, $ak = kl = lm = mn = nb$. Проводим прямые Aa, Bb. В пересечении их находим точку O. Проводим прямые Ok, Ol, Om, On. Эти прямые пересекут

AB в точках K, L, M, N, делящих AB на нужное число (в нашем примере на 5) равных частей.

4. *Разделить данный отрезок на части, пропорциональные данным величинам.*

Решается, как предыдущая задача, только на ab откладываются отрезки, пропорциональные данным величинам.

5. *Восставить перпендикуляр к прямой MN в данной ее точке A.*

Взяв произвольную точку O вне данной прямой (рис. 25), проводим из нее окружность радиусом OA. Через вторую точку B пересечения окружности с прямой MN проводим диаметр BO; конец диаметра C соединяем с A; CA — искомый перпендикуляр.

Этот способ особенно пригоден тогда, когда точка A лежит близко к краю чертежного листа. Способ решения следующей задачи (первый) обладает тем же преимуществом.

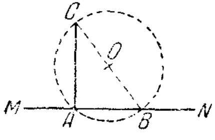


Рис. 25.

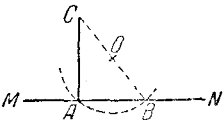


Рис. 26.

6. *Опустить перпендикуляр из данной точки C на прямую MN.*

Из точки C проводим произвольную наклонную CB (рис. 26); находим ее середину O (см. п. 2) и из нее описываем окружность радиусом OB. Окружность пересекает MN еще в точке A. Проведя AC, получим искомый перпендикуляр.

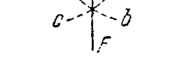


Рис. 27.

В случае, когда точка C лежит близко к прямой MN, этот способ может дать большую погрешность. Тогда лучше пользоваться следующим построением. Из точки C, как из центра (рис. 27), проводим дугу DE, пересекающую MN в точках D, E. Из точек D, E, как из центров, проводим одним и тем же радиусом две дуги cd, ab, пересекающиеся в точке F. Проведя FC, получим искомый перпендикуляр.

7. *При данной вершине K и луче KM построить угол, равный данному углу ABC.*

Из вершины B описываем дугу PQ произвольного радиуса (рис. 28). Тем же раствором циркуля описываем из центра K дугу pq. Из точки p засекаем дугу $\alpha\beta$ радиусом, равным PQ. Точку q пересечения дуг pq и $\alpha\beta$ соединяем с K. Угол qKM — искомый.

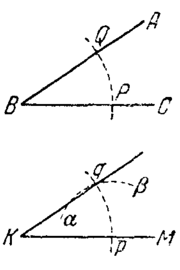


Рис. 28.

8. *Построить углы* 60° *и* 30°.

Из концов A и B (рис. 29) произвольного отрезка AB описываем радиусом AB две дуги. Точки их пересечения C и D соединяем прямой, которая пересечет отрезок AB в его середине O. Точку A соединяем прямой с точкой C. $\angle CAO = 60°$, $\angle ACO = 30°$.

9. *Построить угол* 45°.

На сторонах прямого угла BAC (рис. 30) откладываем равные отрезки AB и AC и соединяем концы их прямой CB. Прямая BC образует с AC и AB углы по 45°.

10. *Разделить данный угол BAC пополам.*

Из вершины A проводим дугу DE произвольным радиусом (рис. 31). Из точек D и E ее пересечения со сторо-

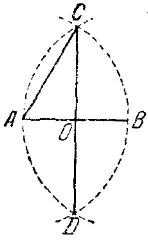


Рис. 29.

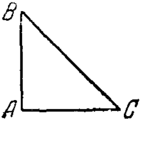


Рис. 30.

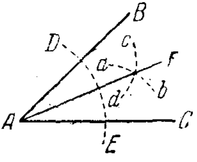


Рис. 31.

нами AB и AC описываем произвольными равными радиусами (удобнее всего прежним раствором циркуля) дуги ab, cd. Точку их пересечения соединяем с A; полученная прямая AF делит угол BAC пополам.

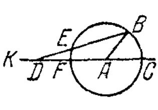


Рис. 32.

11. *Разделить данный угол BAC на три равные части.*

Простой линейкой и циркулем точно выполнить это построение нельзя.

С помощью циркуля и меченой линейки (например, сантиметровой) построение можно выполнить так (рис. 32): произвольным радиусом AC описываем из точки A окружность. Продолжаем AC за точку A. Кладем меченую линейку так, чтобы она проходила через B и вращаем ее вокруг B до тех пор, пока отрезок ED между окружностью и прямой AK не станет равным радиусу AC. Тогда угол EDF есть треть угла BAC.

12. *Через две данные точки A и B провести окружность данным радиусом r.*

Из точек A и B (рис. 33) проводим дуги ab и cd радиусом r. Точка их пересечения есть центр искомой окружности.

13. *Через три данные точки A, B, C (не лежащие на одной прямой) провести окружность.*

Проводим перпендикуляры ED и KL (рис. 34) к отрезкам AC и BC через их середины (см. п. 2). Точка пересечения этих перпендикуляров O есть центр искомой окружности.

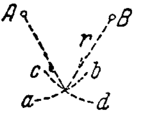


Рис. 33.

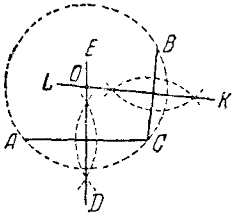


Рис. 34.

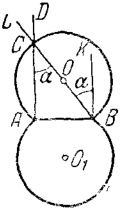


Рис. 35.

14. *Найти центр данной дуги окружности.*

На данной дуге выбираем три точки (по возможности далеко отстоящие друг от друга). Затем поступаем, как в предыдущей задаче.

15. *Разделить пополам данную дугу окружности.*

Концы дуги соединяем хордой. Проводим перпендикуляр через середину хорды (см. п. 2). Он разделит дугу (и хорду) пополам.

16. *Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α.*

Искомое место представляет собой две дуги равных окружностей, опирающиеся концами в точки A и B (рис. 35). (Сами точки A и B не принадлежат к геометрическому месту.) Центры этих дуг находятся так: проводим перпендикуляры AD и BK в концах отрезка AB (см. п. 5). Строим угол $KBL = \alpha$. В пересечении BL и AD находим точку C. Середина O отрезка BC есть центр одной из искомых дуг. Другая дуга строится так же.

17. *Провести через данную точку A касательную к данной окружности.*

Если точка A лежит на окружности (рис. 36), строим BAC перпендикулярно к радиусу OA (см. п. 5); CB — искомая касательная.

Если A лежит вне круга (рис. 37), делим AO пополам (см. п. 2) и из середины B проводим радиусом BO дугу CD.

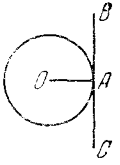


Рис. 36.

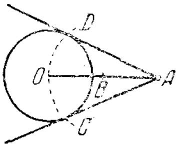


Рис. 37.

Точки D и C соединяем прямыми с A. Прямые AD и AC — искомые касательные.

18. *Провести к данным двум окружностям общую внешнюю касательную.*

а) Если радиусы данных окружностей равны между собой, задача всегда имеет два решения (рис. 38). Через центры A и B проводим диаметры KK_1 и LL_1, перпендикулярные к линии центров AB. Проведя KL и K_1L_1, имеем искомые решения.

б) Пусть радиусы данных окружностей не равны: $R > r$; из центра большого круга проводим окружность

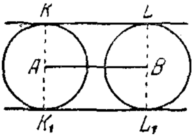


Рис. 38.

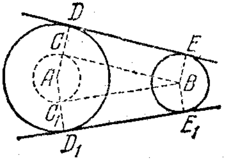


Рис. 39.

радиусом $AC = R - r$ (рис. 39). К ней проводим касательную BC из центра B меньшего круга (п. 17). Центр A соединяем с точкой касания C прямой. Продолжаем ее и получаем на большей окружности точку D. Проводим BE перпендикулярно к BC до пересечения в точке E с меньшей окружностью. Точки D и E соединяем. Прямая DE — искомая касательная. Задача допускает два решения (DE и D_1E_1), если меньший круг не лежит целиком внутри большего. Если меньший круг целиком лежит внутри большего (рис. 40), задача не имеет решений. В промежуточном случае, когда окружности имеют внутреннее

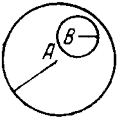


Рис. 40.

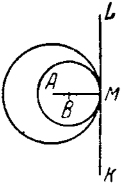


Рис. 41.

касание (рис. 41), задача имеет одно решение: через точку внутреннего касания M проводим $KL \perp AM$.

19. *Провести к двум данным окружностям общую внутреннюю касательную.*

Задача не имеет решения, если один из кругов лежит внутри другого, а также если данные круги пересекаются. В случае внешнего касания (рис. 42) задача имеет одно решение: через точку M проводим $KL \perp AP$.

В остальных случаях имеем два решения (DE и D_1E_1, рис. 43). Из центра A проводим окружность радиусом,

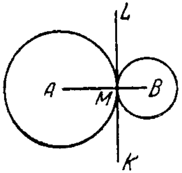


Рис. 42.

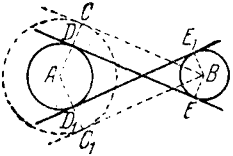


Рис. 43.

равным сумме радиусов данных окружностей. Из центра B проводим касательную BC к построенной окружности (п. 17.) Точку касания C и центр A соединяем прямой AC; последняя пересечет окружность (A) в точке D. Из B проводим радиус $BE \perp BC$. Конец его E соединяем с D; ED — искомая касательная. Так же строится и другая касательная E_1D_1.

20. *Описать окружность около данного треугольника ABC.*

Через вершины A, B, C проводим окружность (см. п. 13).

21. *Вписать окружность в данный треугольник ABC.* Делим пополам два угла треугольника (рис. 44), например A и C (см. п. 10). Из точки O пересечения биссектрис проводим $OD \perp AC$ (см. п. 6). Радиусом OD описываем искомую окружность.

22. *Описать окружность около данного прямоугольника (или квадрата) ABCD.*

Проводим диагонали BD и AC (рис. 45). Из точки O их пересечения проводим окружность радиусом OA.

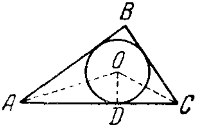


Рис. 44.

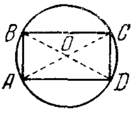


Рис. 45.

Около косоугольного параллелограмма описать окружность нельзя.

23. *Вписать окружность в ромб (или квадрат) ABCD.* Из точки O пересечения диагоналей проводим $OE \perp AB$ (рис. 46). Окружность с центром O и радиусом OE — искомая.

В неравносторонний параллелограмм вписать окружность нельзя.

24. *Описать окружность около данного правильного многоугольника.*

Если число сторон четно (рис. 47), соединяем прямыми AB и CD две любые пары противоположных вершин. Из

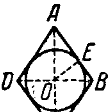


Рис. 46.

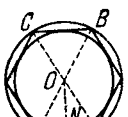


Рис. 47.

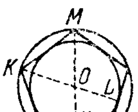


Рис. 48.

точки их пересечения O радиусом OA описываем окружность.

Если число сторон нечетно (рис. 48), опускаем из двух любых вершин K и M перпендикуляры KL и MN на противоположные стороны. Из точки их пересечения O радиусом OK описываем окружность.

25. *Вписать окружность в данный правильный многоугольник.*

Центр окружности находится, как в предыдущей задаче. Из центра опускаем перпендикуляр ON на одну из сторон (рис. 47). Радиусом ON (или OL, рис. 48) описываем окружность.

26. *Построить треугольник по трем сторонам* a, b и c.

Пусть наибольшую длину имеет отрезок a. Если $a < b + c$, то искомый треугольник можно построить так: откладываем отрезок $BC = a$ (рис. 49). Из концов его B и C описываем дуги mn и pq радиусами c и b. Точку пересечения дуг A соединяем с B и C.

Если $a > b + c$, то задача не имеет решения. В промежуточном случае $a = b + c$ условию отвечает только «вырожденный треугольник»: три его вершины лежат на одной прямой.

27. *Построить параллелограмм по данным сторонам* a *и* b *и одному из углов* α.

Строим $\angle A = \alpha$ (см. п. 7); на его сторонах откладываем отрезки $AC = a$, $AB = b$ (рис. 50). Проводим из B дугу mn

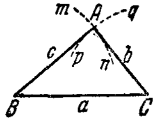


Рис. 49.

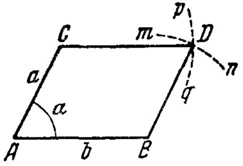


Рис. 50.

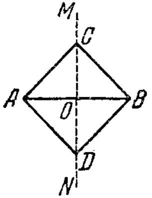


Рис. 51.

радиусом a и из C — дугу pq радиусом b. Точку пересечения этих дуг D соединяем с C и B.

28. *Построить прямоугольник по данным основанию и высоте.*

Поступаем, как в предыдущей задаче; прямой угол α строим, как в п. 5.

29. *Построить квадрат по данной стороне.*

Поступаем, как в пп. 27 и 28.

30. *Построить квадрат по данной его диагонали* AB.

Через середину AB (рис. 51) проводим к AB перпендикуляр MN (см. п. 2). От точки O его пересечения с AB откладываем на MN отрезки OC и OD, равные OA; $ACBD$ — искомый квадрат.

31. *Вписать квадрат в данный круг.*

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD; $ACBD$ — искомый квадрат (рис. 52).

32. *Описать квадрат около данного круга.*

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 53). Из их концов, как из центров, описываем

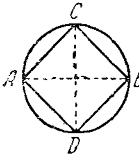


Рис. 52.

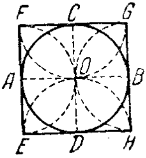


Рис. 53.

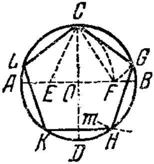


Рис. 54.

четыре полуокружности радиусами, равными OA. Точки F, G, H и E их пересечения — вершины искомого квадрата.

33. *Вписать правильный пятиугольник в данный круг.*

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (рис. 54). Делим пополам радиус AO в точке E. Из E радиусом EC проводим дугу CF, пересекая ею диаметр AB в точке F. Из C радиусом CF проводим дугу FG, пересекая ею данную окружность в точке G; $CG\ (=CF)$ есть одна сторона искомой фигуры. Проводим тем же радиусом дугу mn из центра G, получаем еще одну вершину H искомой фигуры и т. д.

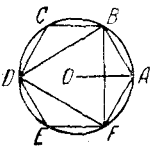


Рис. 55.

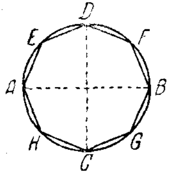


Рис. 56.

34. *Вписать в данный круг правильный шестиугольник и треугольник.*

Раствором циркуля, равным радиусу круга, делаем на окружности засечки в точках A, B, C, D, E, F (рис. 55). Соединяя точки A, B, C, D, E, F подряд, получим правильный шестиугольник. Соединяя их через одну, получим правильный (равносторонний) треугольник.

35. *Вписать правильный восьмиугольник в данный круг.*

Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AB, CD (рис. 56). Разделив пополам дуги AD, DB, BC, CA точками E, F, G, H (п. 15), последовательно соединяем полученные восемь точек.

36. *Вписать правильный 10-угольник в данный круг.* Построим точку F (рис. 54 на стр. 267), как и в п. 33. OF есть сторона искомой фигуры. Раствором циркуля, равным OF, сделаем на окружности десять последовательных засечек. Получим вершины искомой фигуры.

Правильные многоугольники, вписанные в круг и имеющие семь и девять сторон, не могут быть точно построены только с помощью циркуля и линейки.

37. *Около данного круга описать правильный треугольник, пятиугольник, шестиугольник, восьмиугольник, десятиугольник.*

Отметим на окружности (рис. 57) вершины $A, B, \ldots, F$ правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон (см. пп. 33—36). Проведем радиусы $OA, OB, \ldots, OF$ и продолжим их. Дугу AB разделим пополам точкой E (см. п. 15). Через E проведем $JP \perp OE$. Отрезок JP, заключенный между продолжениями соседних радиусов, есть сторона искомой фигуры. На продолжении остальных радиусов откладываем отрезки $OK, OL, \ldots, ON$, равные OP. Точки $J, K, L, \ldots, N, P$ последовательно соединяем. Многоугольник $JKLM \ldots NP$ — искомый.

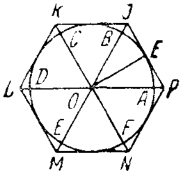


Рис. 57.

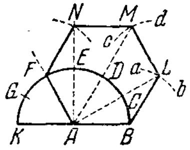


Рис. 58.

38. *Построить правильный n-угольник по данной его стороне a.*

На отрезке BK, равном $2a$, как на диаметре, строим (рис. 58) полукруг. Этот полукруг делим на n равных частей точками C, D, E, F, G (вершинами правильного вписанного $2n$-угольника; на нашей фигуре $n=6$). Центр A соединяем лучами со всеми полученными точками, кроме двух последних (K и G). Из точки B радиусом AB проводим дугу ab, засекая на луче AC точку L. Из точки L тем же радиусом проводим дугу cd, засекая на луче AD точку M, и т. д. Точки B, L, M, N и т. д. последовательно соединяем прямыми. Многоугольник $ABLMNF$ — искомый.

Задачу эту решить с помощью линейки и циркуля можно не всегда; например, при $n=7$, $n=9$ этого сделать нельзя, так как полукруг линейкой и циркулем на 7 или 9 частей геометрически точно не делится.

Б. ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Предмет геометрии

Геометрия [1]) изучает пространственные свойства предметов, оставляя в стороне все остальные их признаки. Например, резиновый мяч диаметром в 25 *см* и чугунное ядро того же диаметра отличаются друг от друга по весу, по цвету, по твердости и т. д. Однако все эти признаки мяча и ядра в геометрии оставляются без внимания; пространственные же их свойства (форма и размеры) одинаковы. С точки зрения геометрии каждый из этих предметов представляет *шар* диаметром 25 *см*.

Предмет, от которого мысленно отняты все его свойства, кроме пространственных, называется *геометрическим телом*. Шар есть одно из геометрических тел.

Идя дальше по пути отвлечения, мы получаем понятия геометрической *поверхности*, геометрической *линии* и геометрической *точки*. Поверхность мы мысленно отделяем от тела, которому она принадлежит, и лишаем ее толщины. Линию мы лишаем толщины и ширины, а точку вовсе лишаем измерений. Мы мыслим, что точка может служить границей линии (или ее части), линия — границей поверхности и поверхность — границей тела. Мы мыслим также, что точка может двигаться и своим движением порождать линию, линия может движением порождать поверхность, а поверхность — порождать тело.

В природе нет точек, лишенных измерений, но есть предметы столь малых размеров, что их в некоторых условиях можно принять за геометрические точки. В природе нет также ни геометрических линий, ни геометрических поверхностей, но все свойства линий и поверхностей, найденные в геометрии, находят многообразные применения в науке и технике. Это происходит потому, что геометрические понятия порождены пространственными свойствами действительного мира. Отвлеченная форма геометрических понятий для того и служит, чтобы эти свойства изучать в чистом их виде.

§ 2. Исторические сведения о развитии геометрии

Первые геометрические понятия приобретены людьми в глубокой древности. Они возникли из потребности определять вместимость различных предметов (сосудов, амбаров

---

[1]) О происхождении названия «геометрия» см. на след. странице.

и т. п.) и площади земельных участков. Древнейшие известные нам письменные памятники, содержащие правила для определения площадей и объемов, были составлены в Египте и Вавилоне около 4 тысяч лет назад. Около $2^1/_2$ тысяч лет назад греки заимствовали у египтян и вавилонян их геометрические знания. Первоначально эти знания применялись преимущественно для измерения земельных участков. Отсюда и греческое название «геометрия», что означает «землемерие».

Греческие ученые открыли множество геометрических свойств и создали стройную систему геометрических знаний. В ее основу они положили простейшие геометрические свойства, подсказанные опытом. Остальные свойства выводились из простейших с помощью рассуждений.

Эта система около 300 г. до н. э. получила завершенный вид в «Началах» Евклида [1]), где изложены также основы теоретической арифметики. Геометрические разделы «Начал» по содержанию и по строгости изложения примерно совпадают с нынешними школьными учебниками геометрии.

Однако там ничего не говорится ни об объеме, ни о поверхности шара, ни об отношении окружности к диаметру (хотя есть теорема о том, что площади кругов относятся, как квадраты диаметров). Приближенная величина этого отношения была известна из опыта задолго до Евклида, но только в середине 3 века до н. э. Архимед (287—212 гг.) строго доказал, что отношение окружности к диаметру (т. е., по-нашему, число π) заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Архимед доказал также, что объем шара меньше объема описанного цилиндра ровно в $1\frac{1}{2}$ раза и что поверхность шара в $1\frac{1}{2}$ раза меньше полной поверхности описанного цилиндра.

В способах, примененных Архимедом для решения упомянутых задач, содержатся зачатки методов высшей математики. Эти способы Архимед применил к решению многих трудных задач геометрии и механики, очень важных для строительного дела и для мореплавания. В частности, он определил объемы и центры тяжести многих тел

---

[1]) «Начала» переведены на все языки мира. На русском языке они издавались много раз. Последний перевод был сделан Д. Д. Мордухай-Болтовским. Гостехиздат, 1948 (кн. I—VI), 1949 (кн. VII—X), 1950 (кн. XI—XV).

и изучил вопрос о равновесии плавающих тел различной формы.

Греческие геометры исследовали свойства многих линий, важных для практики и для теории. Особенно полно они изучили *конические сечения* (см. IV, В, 9). Во втором веке до н. э. Аполлоний обогатил теорию конических сечений многими важными открытиями, остававшимися непревзойденными в течение 18 веков.

Для изучения конических сечений Аполлоний пользовался методом *координат* (см. VI, 6). К изучению всевозможных линий на плоскости этот метод был применен лишь в 30-х годах 17 века французскими учеными Ферма (1601—1655) и Декартом (1596—1650). Для технической практики того времени было достаточно плоских линий. Лишь сто лет спустя, когда этого потребовали возросшие запросы астрономии, геодезии и механики, координатный метод был применен к изучению кривых поверхностей и линий, проведенных на кривых поверхностях.

Систематическое развитие метода координат в пространстве было дано в 1748 г. русским академиком Эйлером — гениальным и всесторонним ученым.

Более двух тысяч лет система Евклида считалась непреложной. Но в 1826 г. гениальный русский ученый Николай Иванович Лобачевский создал новую геометрическую систему. Исходные ее положения отличаются от основных положений Евклида лишь в одном пункте[1]). Но отсюда вытекает множество очень существенных особенностей.

Так, в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше, чем 180° (в геометрии Евклида она равна 180°). При этом недостаток до 180° тем больше, чем больше площадь треугольника.

Может показаться, что опыт опровергает этот и другие выводы Лобачевского. Но это не так. Непосредственно измеряя углы треугольника, мы находим, что они в сумме составляют примерно 180°. Точной же величины суммы мы не можем найти вследствие несовершенства измерительных инструментов. Между тем все те треугольники, которые доступны нашему измерению, слишком малы, чтобы непосредственными измерениями обнаружить недостаток суммы углов до 180°.

При дальнейшем развитии гениальных идей Лобачевского оказалось, что система Евклида недостаточна

---

[1]) В геометрии Евклида через точку *A* проходит только одна прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой *BC* и не пересекающая ее. В геометрии Лобачевского таких прямых бесчисленное множество.

для исследования многих вопросов астрономии и физики, где мы имеем дело с фигурами огромных размеров. Однако в условиях обычного опыта она остается вполне пригодной. А так как к тому же она обладает преимуществом *простоты, то ее применяют и будут применять* в технических расчетах, ее изучают и будут изучать в школах.

§ 3. Теоремы, аксиомы, определения

Рассуждение, устанавливающее какое-либо свойство, называется *доказательством*. Доказываемое свойство называется *теоремой*. При доказательстве геометрической теоремы мы опираемся на ранее установленные свойства. Некоторые из них в свою очередь являются теоремами; некоторые же считаются в геометрии основными и принимаются без доказательства. Свойства, принимаемые без доказательства, называются *аксиомами*.

Аксиомы возникли из опыта, и опыт же проверяет истинность аксиом в их совокупности. Проверка состоит в том, что все теоремы геометрии оказываются согласными с опытом; этого не случилось бы, если бы система аксиом была ложной.

Ни одно геометрическое свойство, взятое в отдельности, не является аксиомой, так как его всегда можно доказать на основании других свойств. Так, в геометрии обычно принимается за аксиому следующее свойство параллельных прямых: «через одну и ту же точку нельзя провести две различные прямые, параллельные одной и той же прямой» (аксиома параллельности). На основании этой аксиомы (и ряда других) доказывается, между прочим, такое свойство треугольника: «сумма углов треугольника равна 180°». Между тем мы могли бы последнее свойство принять за аксиому вместо аксиомы параллельности (оставив остальные аксиомы прежними). Тогда упомянутое свойство параллельных прямых можно доказать и оно станет теоремой.

Таким образом, систему аксиом можно выбирать различными способами. Нужно только, чтобы взятых аксиом было достаточно для вывода всех прочих геометрических свойств. В геометрии стремятся число аксиом по возможности уменьшить. Это делается для того, чтобы уяснить логические связи между отдельными свойствами.

Аксиомы предпочтительно выбираются из числа простейших геометрических свойств. Впрочем, по вопросу о простоте того или иного свойства мнения могут быть различны.

Некоторые понятия в геометрии мы принимаем за начальные, их содержание можно выяснить только из опыта (таково, например, понятие т о ч к и). Все остальные понятия мы выясняем, опираясь на начальные. Такие объяснения называются *определениями.* Каждое геометрическое определение опирается либо непосредственно на начальные понятия, либо на понятия, определенные прежде.

Одно и то же геометрическое понятие можно определять различно. Например, диаметр окружности можно определить, как хорду, проходящую через центр, или как хорду наибольшей длины. Приняв за определение одно из этих свойств, можно доказать другое. Предпочтительно взять за определение простейшее свойство; впрочем, и здесь невозможно обеспечить всеобщего согласия.

§ 4. Прямая линия, луч, отрезок

Прямую линию можно мысленно продолжить в обе стороны безгранично. В геометрии название *«прямая»* обозначает обычно прямую линию, не ограниченную ни с одной, ни с другой стороны. Прямая линия, с одной стороны ограниченная, а с другой — нет, называется *полупрямой* или *лучом.* Прямая линия, ограниченная с обеих сторон, называется *отрезком.*

§ 5. Углы

Угол есть фигура (рис. 59), образованная двумя лучами OA и OB (*стороны угла*), исходящими из одной точки O (*вершина угла*).

Мерой угла служит величина поворота вокруг вершины O, переводящего луч OA в положение OB. Широко распространены две системы измерения углов: *радианная* и *градусная.* Они разнятся выбором единицы меры. О радианной мере см. V, 3.

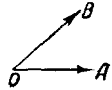


Рис. 59.

Градусная система измерения углов [1]).

В ней за единицу принимается поворот луча на $^1/_{360}$ часть одного полного оборота — *градус* (обозначение °). Полный оборот (например, при движении часовой стрелки

---

[1]) Градусная система восходит к глубокой древности (см. II, 7, п. 4). Во время первой французской буржуазной революции (1793 г.) во Франции вместе с десятичной (метрической) системой мер была введена сотенная (центезимальная) система измерения углов. В ней прямой угол делится на 100 градусов («градов»), градус на 100 мин., минута на 100 секунд. Эта система применяется и сейчас, но во всеобщее употребление она не вошла. Наиболее часто она употребляется в геодезических измерениях.

с 0 час. до 12 час.) составляет, таким образом, 360°. Градус делится на 60 *минут* (обозначение ′); минута — на 60 *секунд* (″). Запись 42°33′21″ означает 42 градуса, 33 минуты, 21 секунду.

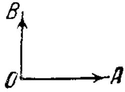


Рис. 60.

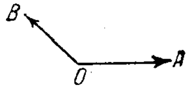


Рис. 61.

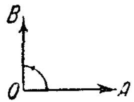


Рис. 62.

Угол в 90° (т. е. $^1/_4$ полного оборота) называется *прямым* (рис. 60) и обозначается буквой d.

Угол, меньший 90°, называется *острым* (AOB на рис. 59); больший 90° — *тупым* (рис. 61). Прямые линии, образующие прямой угол, называются *перпендикулярными* одна к другой.

Знаки углов. Часто важно указать, в каком направлении происходит вращение луча. Обычно мера угла счи-

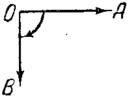


Рис. 63.

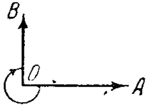


Рис. 64.

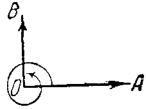


Рис. 65.

тается *положительной*, если вращение совершается против часовой стрелки, и *отрицательной* — в противном случае. Например, если луч OA переместился в OB, как показано на рис. 62, то $\angle AOB = +90°$. На рис. 63 $\angle AOB = -90°$. На рис. 64 $\angle AOB = -270°$. Одному и тому же взаимному расположению лучей могут отвечать разные угловые меры в зависимости от характера вращения. Так, $\angle AOB$ на рис. 65 можно считать равным $+450°$. В начальной геометрии мера угла считается всегда положительной и измеряет кратчайший поворот, так что мера угла не может превысить 180°.

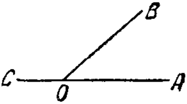


Рис. 66.

Смежные углы (рис. 66) — пара углов AOB и COB с общей вершиной O и общей стороной OB; две другие стороны OA и OC составляют продолжение одна другой. Сумма смежных углов равна 180° ($2d$).

Вертикальные углы — пара углов, у которых вершина общая, а стороны одного составляют продолжение сторон другого. На рис. 67 $\angle AOC$ и $\angle DOB$ (а также $\angle COB$ и $\angle AOD$) — вертикальные. Вертикальные углы равны между собой ($\angle AOC = \angle BOD$).

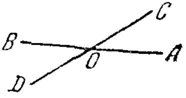


Рис. 67.

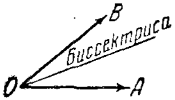


Рис. 68.

Часто говорят: *«угол между двумя прямыми»*; при этом имеется в виду один из образуемых ими четырех углов (обычно острый).

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам (рис. 68). Биссектрисы (OM и ON, рис. 69) верти-

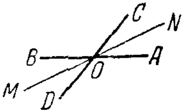


Рис. 69.

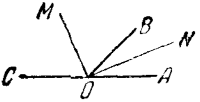


Рис. 70.

кальных углов составляют продолжение одна другой. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 70).

§ 6. Многоугольник

Плоская фигура, образованная замкнутым рядом прямолинейных отрезков, называется *многоугольником*. На рис. 71 изображен шестиугольник $ABCDEF$. Точки A, B, C, D, E, F — *вершины многоугольника*; углы при них (углы многоугольника) обозначаются $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, ..., $\angle F$. Отрезки: AC, AD, BE и т. д. — *диагонали*; AB, BC, CD и т. д. — *стороны многоугольника*; сумма длин сторон $AB + BC + CD + \ldots + FA$ называется *периметром* и обозначается p, а иногда $2p$ (тогда p — полупериметр).

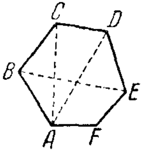


Рис. 71.

В элементарной геометрии рассматриваются только *простые* многоугольники, т. е. такие, контур которых не имеет самопересечений. Многоугольники, контур которых имеет самопересечения, называются *звездчатыми многоугольниками*. На рис. 72 изображен звездчатый многоугольник $ABCDE$.

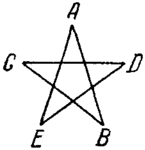


Рис. 72.

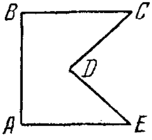


Рис. 73.

Если все диагонали многоугольника лежат внутри него, многоугольник называется *выпуклым*. Шестиугольник на рис. 71 выпуклый; пятиугольник на рис. 73 невыпуклый (диагональ EC лежит вне многоугольника).

Сумма внутренних углов во всяком выпуклом многоугольнике равна $180°(n-2)$, где n — число сторон многоугольника [1]).

§ 7. Треугольник

Треугольник (тр-к) — многоугольник с тремя сторонами. Стороны тр-ка часто обозначаются малыми буквами, соответствующими обозначению противоположных вершин.

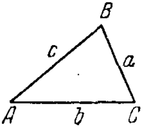


Рис. 74.

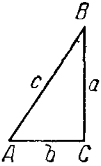


Рис. 75.

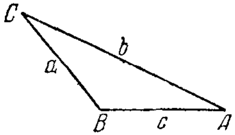


Рис. 76.

Если все три угла острые, то тр-к — *остроугольный* (рис. 74); если один из углов прямой — *прямоугольный* (рис. 75); стороны, образующие прямой угол, называются *катетами* (a, b); сторона против прямого угла — *гипотенузой* (c). Если один из углов тупой (например, $\angle B$, рис. 76), то тр-к — *тупоугольный*.

---

[1]) В учебниках геометрии это свойство высказывается обычно только для выпуклых многоугольников. Но оно справедливо для всех «простых» многоугольников. Нужно заметить, что в невыпуклом многоугольнике один или несколько внутренних углов превышают 180°. Так, в невыпуклом пятиугольнике, изображенном на рис. 73, два угла — прямые, два угла имеют по 45°, а один содержит 270°. Сумма углов составляет $180°(5-2)=540°$.

Тр-к ABC *равнобедренный* (рис. 77), когда две его стороны равны ($b=c$); *равносторонний* (рис. 78), когда три стороны равны ($a=b=c$). Равные стороны равнобедренного тр-ка *называются* *боковыми*; третья сторона — *основанием.*

Во всяком тр-ке против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон — равные углы, и обратно. В частности, равносторонний тр-к вместе с тем *равноугольный*, и обратно.

Во всяком треугольнике сумма углов равна 180°; в равностороннем тр-ке каждый угол равен 60°.

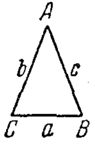


Рис. 77.

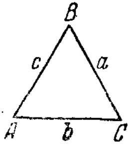


Рис. 78.

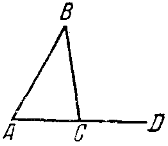


Рис. 79.

Продолжив одну из сторон тр-ка (AC на рис. 79), получаем *внешний* угол $\angle BCD$. *Внешний угол равен сумме внутренних, с ним несмежных*: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Всякая сторона тр-ка меньше суммы и больше разности двух других сторон ($a < b + c$; $a > b - c$):

Площадь тр-ка равна произведению половины основания на высоту (о высоте тр-ка см. § 9): $S = {}^1/_2 a h_a$.

§ 8. Признаки равенства треугольников

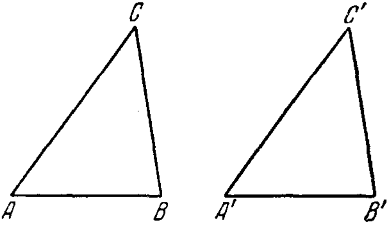


Рис. 80.

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

1) две стороны и угол, заключенный между ними; например, $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $\angle A = \angle A'$ (рис. 80);

2) два угла и прилежащая к ним сторона; например $\angle A = \angle A'$; $\angle C = \angle C'$; $AC = A'C'$;

2а) два угла и сторона, противолежащая одному из них, например, $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$; $AC = A'C'$;

3) три стороны: $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$;

4) две стороны и угол, лежащий против *бо́льшей* из них; например, $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $\angle A = \angle A'$ на рис. 80, где BC — бо́льшая из сторон AB, BC. Если же равные углы лежат против меньших сторон, то треугольники могут быть не равны. Например, треугольники LMN

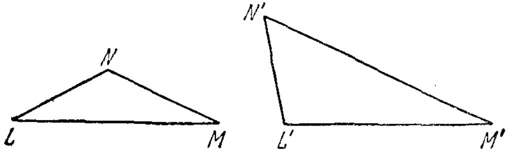


Рис. 81.

и $L'M'N'$ на рис. 81 не равны, хотя у них $LM = L'M'$, $LN = L'N'$ и $\angle M = \angle M'$. Здесь углы M, M' лежат против меньших сторон LN, $L'N'$.

§ 9. Замечательные линии и точки в треугольнике

Высотой тр-ка называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины тр-ка на противолежащую сторону или на ее продолжение (сторона, на которую опускается перпендикуляр, называется в этом случае *основанием* треугольника). В тупоугольном тр-ке (ABC, рис. 82) две высоты (AD, BE) падают на продолжение сторон и лежат вне тр-ка; третья (CF) — внутри тр-ка. В остроугольном тр-ке (рис. 83) все три высоты лежат внутри тр-ка. В прямоугольном тр-ке катеты служат и высотами. Три высоты тр-ка всегда пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*: в тупоугольном тр-ке ортоцентр лежит вне тр-ка; в прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла.

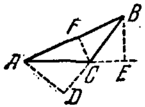


Рис. 82.

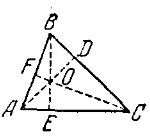


Рис. 83.

Высота тр-ка, опущенная на сторону a, обозначается h_a. Через три стороны она выражается формулой

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}, \quad \text{где} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Медианой тр-ка называется отрезок, соединяющий любую вершину тр-ка с серединой противоположной стороны. Три медианы тр-ка (AD, BE, CF, рис. 84) пересекаются

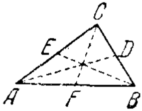


Рис. 84.

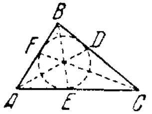


Рис. 85.

в одной точке (всегда внутри тр-ка), являющейся центром тяжести тр-ка. Эта точка делит каждую медиану в отношении $2:1$ (считая от вершины). Медиана, соединяющая вершину тр-ка A с серединой стороны a, обозначается m_a. Через стороны тр-ка она выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Биссектрисой тр-ка называется отрезок биссектрисы любого угла (см. IV, Б, 5) от вершины до пересечения с противоположной стороной. Три биссектрисы тр-ка (AD, BE, CF, рис. 85) пересекаются в одной точке (всегда внутри тр-ка), являющейся центром вписанного круга (см. IV, Б, 19). Биссектриса угла A обозначается β_a. Через стороны тр-ка она выражается формулой

$$\beta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

где p — полупериметр. Биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам. На рис. 85 $AE : EC = AB : BC$.

Пример. $AB = 30$ *см*, $BC = 40$ *см*, $AC = 49$ *см*. Найти AE и EC. Две части (AE и EC), на которые нужно разделить $AC = 49$ *см*, относятся, как $30:40$ или как $3:4$. Приняв за единицу масштаба x — отрезок, содержащийся в AE 3 раза, а в EC 4 раза, имеем $AC = 3x + 4x = 7x$, $x = AC : 7 = 49 : 7 = 7$, откуда $AE = 3x = 21$; $EC = 4x = 28$.

Три перпендикуляра к сторонам тр-ка, проведенные через их середины (D, E, F на рис. 86, 87, 88), пересекаются в одной точке, служащей центром описанного круга (IV, Б, 19). В тупоугольном тр-ке (рис. 86) эта точка лежит вне тр-ка, в остроугольном (рис. 87) — внутри, в прямоугольном — на середине гипотенузы (рис. 88).

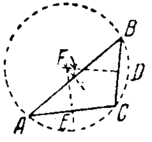


Рис. 86.

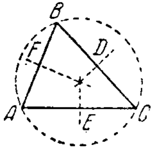


Рис. 87.

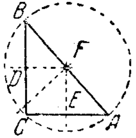


Рис. 88.

В равнобедренном тр-ке высота, медиана и биссектриса, опущенные на основание [1]), а также перпендикуляр, проведенный через середину основания, совпадают друг с другом; в равностороннем то же имеет место для всех трех сторон. В остальных случаях ни одна из упомянутых линий не совпадает с другой. Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанного круга и центр описанного круга совпадают друг с другом только в равностороннем тр-ке.

§ 10. Прямоугольные проекции: соотношения между сторонами треугольника

Прямоугольной проекцией (или, короче, *проекцией*) точки на прямую называется основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. На рис. 89 точки a, b, c, d — проекции точек A, B, C, D на прямую MN. Проекцией отрезка AB на прямую MN называется отрезок ab прямой MN, ограниченный проекциями a и b концов отрезка AB. Отрезок bc есть проекция BC и т. д. Обозначение: $ab = \text{пр.}_{MN} AB$; короче, $ab = \text{пр. } AB$.

Сумма проекций звеньев ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка. На рис. 89 пр. $AD =$ пр. $AB +$ + пр. $BC +$ пр. CD. Для полной общности этого правила необходимо смотреть на проекцию отрезка как на величину *алгебраическую*; проекцию ab отрезка AB принято считать *положительной*, если b правее a, и *отрицательной*, если

[1]) **Основанием равнобедренного тр-ка всегда называют сторону, не равную двум другим.**

b левее a. Так на рис. 90 пр. $AB = ab$ отрицательна; пр. $BC = bc$, пр. $CD = cd$, пр. $DE = de$ положительны; пр. $EF = ef$ отрицательна. Поэтому (алгебраическую) сумму проекций звеньев ломаной линии $ABCDEF$ мы получим, сложив длины отрезков bc, cd, de и вычтя отсюда

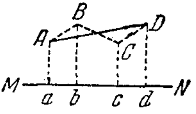


Рис. 89.

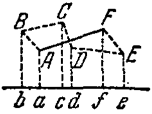


Рис. 90.

сумму длин отрезков ab и ef. Полученная величина равна af — проекции замыкающего отрезка AF.

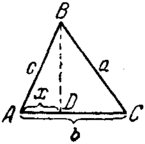


Рис. 91.

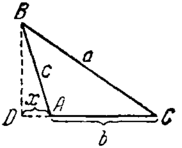


Рис. 92.

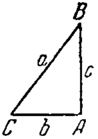


Рис. 93.

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на взятую на ней проекцию другой. При обозначениях рис. 91 и 92 имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \text{ пр.}_{AC} AB. \tag{1}$$

Если x обозначает длину проекции (положительное число), то, когда угол A острый (пр.$_{AC} AB = x$, рис. 91),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx, \tag{2}$$

а когда угол A тупой (пр.$_{AC} AB = -x$, рис. 92),

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx. \tag{3}$$

Если угол A — прямой (рис. 93), то пр.$_{AC} AB = 0$, и мы имеем:

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{4}$$

квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (так называемая *теорема Пифагора*) [1]). Теорема Пифагора часто

[1]) Приписывалась Пифагору — греческому философу 6 — 5 вв. до н. э. На самом деле эта теорема была известна народам древнего Востока еще за 20 веков до н. э.

применяется в разнообразных практических и теоретических вопросах.

Формулу (1) можно представить также в виде

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

(см. V, 22).

§ 11. Параллельные прямые

Две прямые AB и CD (рис. 94) называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их ни продолжать. Обозначение: $AB \parallel CD$. Все точки одной из параллельных равноудалены от другой.

Все прямые, параллельные прямой AB, параллельны и между собой.

Считается, что две параллельные прямые образуют угол, равный нулю (в прямом смысле здесь мы вообще не имеем угла).

Если два луча принадлежат параллельным прямым, то угол между лучами считается равным нулю, когда направления лучей одинаковы, и равным 180°, когда направления лучей противоположны.

Все перпендикуляры (AB, CD, EF, рис. 95) к одной прямой MN параллельны между собой. Обратно, прямая

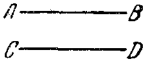


Рис. 94.

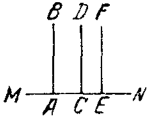


Рис. 95.

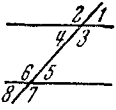


Рис. 96.

MN, перпендикулярная к одной из параллелей, перпендикулярна ко всем другим. Все перпендикуляры к одной из двух параллельных прямых служат перпендикулярами и к другой. Отрезки этих перпендикуляров, заключенные между двумя параллельными прямыми, равны. Общая их длина есть *расстояние* между параллельными прямыми.

При пересечении двух параллельных прямых третьей прямой образуется восемь углов (рис. 96), которые попарно носят названия:

1) соответственные углы (*1* и *5*; *2* и *6*; *3* и *7*; *4* и *8*); эти углы попарно равны ($\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 4 = \angle 8$);

2) внутренние накрест лежащие углы (4 и 5; 3 и 6); они попарно равны;

3) внешние накрест лежащие углы (1 и 8; 2 и 7); они также попарно равны;

4) внутренние односторонние углы (3 и 5; 4 и 6), в сумме составляющие $180°$ ($\angle 3 + \angle 5 = 180°$; $\angle 4 + \angle 6 = 180°$);

5) внешние односторонние углы (1 и 7; 2 и 8), в сумме составляющие $180°$ ($\angle 1 + \angle 7 = 180°$; $\angle 2 + \angle 8 = 180°$)[1].

Углы *с соответственно параллельными сторонами* либо равны друг другу (если оба они острые или оба тупые), либо в сумме дают $180°$; на рис. 97 $\angle 1 = \angle 2$; на

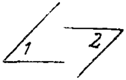


Рис. 97.

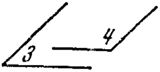


Рис. 98.

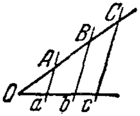


Рис. 99.

рис. 98 $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. *Углы с соответственно перпендикулярными сторонами* точно так же либо равны друг другу, либо в сумме составляют $180°$.

При пересечении сторон угла параллельными прямыми (рис. 99) на сторонах угла отсекаются пропорциональные отрезки:

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OC}{Oc} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac} \text{ и т. д.}$$

§ 12. Параллелограмм и трапеция

Параллелограмм ($ABCD$ на рис. 100) есть четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AB = CD$, $AD = BC$. Любые две противоположные стороны можно считать *основаниями*. Расстояние между ними (по перпендикуляру) называется *высотой* (BF). Диагонали параллелограмма делят друг друга пополам ($AO = OC$; $BO = OD$). Противоположные углы параллелограмма равны ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$). *Сумма*

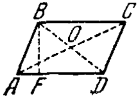


Рис. 100.

[1]) При пересечении двух непараллельных прямых третьей образуемые углы имеют соответственно те же наименования, что и перечисленные выше; для непараллельных прямых приведенные здесь соотношения между углами не верны.

квадратов диагоналей равна сумме квадратов четырех сторон: $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. *Площадь S параллелограмма равна произведению основания* (*a*) *на высоту* (h_a):

$$S = ah_a.$$

Признаки параллелограмма. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если налицо одно из следующих условий:

1) противоположные стороны попарно равны ($AB = CD$, $BC = DA$);

2) две противоположные стороны равны и параллельны ($AB = CD$; $AB \parallel CD$);

3) диагонали взаимно делятся пополам;

4) противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

Если один из углов параллелограмма — прямой, то и все углы — прямые. Такой параллелограмм называется *прямоугольником* (рис. 101). Стороны прямоугольника (*a*, *b*)

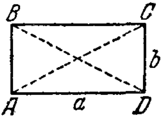


Рис. 101.

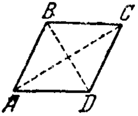


Рис. 102.

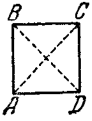


Рис. 103.

одновременно служат его высотами. *Площадь прямоугольника равна произведению сторон:* $S = ab$.

В прямоугольнике диагонали равны: $AC = BD$.

В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов сторон: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

Если в параллелограмме все стороны равны, он называется *ромбом* (рис. 102).

В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$) и делят углы ромба пополам ($\angle DCA = \angle BCA$ и т. д.). *Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:*

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \qquad (AC = d_1,\ BD = d_2).$$

Квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и равными сторонами (рис. 103). Квадрат есть частный вид прямоугольника, а также частный вид ромба. Поэтому он имеет все вышеперечисленные их свойства.

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны ($BC \parallel AD$, рис. 104). Параллелограмм можно считать частным видом трапеции.

Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, две другие (AB, CD) *боковыми сторонами* (*боками*). Расстояние между основаниями (по перпендикуляру) называется *высотой* (BK). Отрезок EF, соединяющий середины боков, называется *средней линией трапеции.*

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$, *и параллельна им:* $EF \parallel AD$.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту:

$$S = \frac{1}{2}(a + b)\,h \quad (AD = a,\ BC = b,\ BK = h).$$

Треугольник является предельным случаем («вырождением») трапеции, когда одно из оснований обращается в точку (рис. 105). В вырожденной трапеции сохраняются

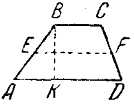


Рис. 104.

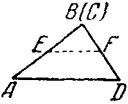


Рис. 105.

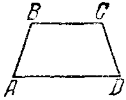


Рис. 106.

ее свойства, например: *линия, соединяющая середины E и F сторон тр-ка ABD (средняя линия тр-ка), параллельна стороне AD и равна ее половине.*

Трапеция с равными боками (если она не параллелограмм) называется *равнобочной* ($AB = CD$, рис. 106). *В равнобочной трапеции углы при основаниях равны* ($\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$).

§ 13. Подобие плоских фигур, признаки подобия треугольников

Если все размеры плоской фигуры изменить (увеличить или уменьшить) в одном и том же отношении (*отношение подобия*), то старая и новая фигуры называются *подобными*. Например, картина и ее фотоснимок представляют подобные фигуры.

В *двух подобных фигурах любые соответственные углы равны между собой,* т. е. если точки A, B, C, D одной фигуры соответствуют точкам a, b, c, d другой, то $\angle ABC = \angle abc$, $\angle BCD = \angle bcd$ и т. д.

Два многоугольника (*ABCDEF* и *abcdef*, *рис.* 107) *подобны, если они имеют равные углы* ($\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, ..., $\angle F = \angle f$) и их соответственные стороны пропорциональны $\left(\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots = \frac{FA}{fa}\right)$. Этим обеспечивается пропорциональность и всех остальных сходственных частей многоугольников; например, диагонали *AE* и *ae* имеют то же отношение, что стороны $\left(\frac{AE}{ae} = \frac{AB}{ab}\right)$. Одной же пропорциональности сторон многоугольников для подобия их недостаточно; например, на рис. 108 четырехугольник *ABCD* (квадрат) имеет стороны, пропорциональные сторонам четырехугольника (ромба) *abcd*; каждая сторона квадрата вдвое больше стороны ромба. Однако диагонали квадрата уменьшились непропорционально (одна больше чем вдвое, другая — меньше), так как углы ромба *abcd* не равны углам квадрата *ABCD*.

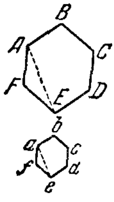


Рис. 107.

Для подобия же треугольников пропорциональности сторон достаточно: ***два тр-ка подобны, если их стороны пропорциональны.*** Так, если стороны тр-ка *ABC* (рис. 109)

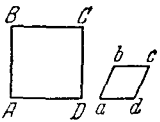


Рис. 108.

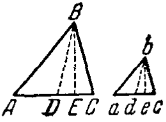


Рис. 109.

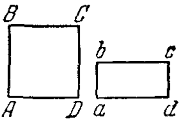


Рис. 110.

вдвое больше сторон тр-ка *abc*, то и биссектриса *BD* вдвое больше биссектрисы *bd*, и высота *BE* вдвое больше высоты *be* и т. д., и соответственные углы у них равны ($\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$).

Если углы двух тр-ков соответственно равны, то тр-ки подобны (достаточно обнаружить равенство двух пар углов, ибо сумма углов в тр-ке всегда 180°). Для произвольных многоугольников этот признак недостаточен. Например, квадрат *ABCD* и прямоугольник *abcd* (рис. 110) имеют соответственно равные углы, но они не подобны.

Тр-ки подобны также, когда две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны (т. е. если $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$ и $\angle B = \angle b$).

Прямоугольные тр-ки подобны, если гипотенуза и катет одного тр-ка пропорциональны гипотенузе и катету другого.

Всякие два круга подобны между собой (один из них есть уменьшенное или увеличенное изображение другого).

Площади подобных фигур (в частности многоугольников) *пропорциональны квадратам их сходственных линий* (например, сторон). В частности, *площади кругов относятся, как квадраты радиусов или диаметров.* Таким образом, было бы грубой ошибкой считать, что отношение площадей двух кругов равно отношению их диаметров. Однако эта ошибка часто делается.

Пример 1. Круглый металлический диск диаметром 20 *см* весит 2,4 *кг*. Сколько весит вырезанный из него диск диаметром 10 *см*?

При решении этой задачи было бы ошибочно рассуждать так: диаметр малого диска вдвое меньше, чем диаметр большого; значит, малый диск и весит вдвое меньше, т. е. вес его 1,2 *кг*.

Правильное решение таково. Так как материал и толщина диска остаются теми же, то веса дисков пропорциональны площадям, а отношение площади малого диска к площади большого равно $\left(\frac{10}{20}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Значит, вес малого диска $2{,}4 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}6$ (*кг*).

Пример 2. Население Голландии составляет 8,2 миллиона, а Швейцарии — 4,1 миллиона. Численность населения Швейцарии изображена на диаграмме квадратом со стороной 10 *см*. Какова должна быть сторона квадрата, изображающего численность населения Голландии?

Обозначив искомую сторону через a, имеем:

$$\left(\frac{a}{10}\right)^2 = \frac{8{,}2}{4{,}1} = 2; \qquad \frac{a}{10} = \sqrt{2} \approx 1{,}4; \; a \approx 14 \text{ см}.$$

§ 14. Геометрическое место. Круг и окружность

Геометрическим местом точек (обладающих данным свойством) называется совокупность *всех* точек, удовлетворяющих заданным условиям.

Окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра).

Равные отрезки, соединяющие центр с точками окружности, называются *радиусами* (обозначения: r или R).

Часть окружности (например, AmD, рис. 111) называется *дугой*. Прямая MN, проходящая через две точки окружности, называется *секущей*; отрезок ее KL, лежащий внутри окружности, — *хордой*. С приближением к центру хорда увеличивается. Хорда BD, проходящая через центр (O) называется *диаметром* (обозначения: d или D). Диаметр равен двум радиусам ($d = 2r$).

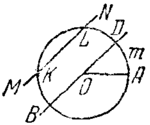


Рис. 111.

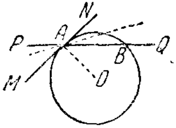


Рис. 112.

Круг есть часть плоскости, лежащая внутри окружности.

Касательная. Пусть секущая PQ (рис. 112) проходит через точки A и B на окружности. Пусть точка B движется по окружности, приближаясь к A. Секущая PQ будет менять положение, вращаясь около точки A. По мере приближения точки B к точке A секущая PQ будет стремиться к некоторому предельному положению MN. Прямая MN называется *касательной* к окружности в точке A.

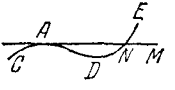


Рис. 113.

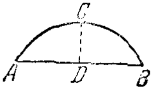


Рис. 114.

Касательная и окружность имеют только одну общую точку[1]). Касательную можно считать выродившейся секущей.

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу OA, проведенному в точку касания A.

Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные; длины их равны (см. рис. 120 на след. стр.).

Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой ACB и стягивающей ее хордой AB (рис. 114).

---

[1]) Это свойство обычно принимают за определение касательной к окружности; однако для других линий это определение может оказаться недействительным. Например, на рис. 113 MN есть касательная к линии $CADE$ в точке A. Однако MN, кроме A, имеет с линией $CADE$ еще одну общую точку N. Данное же в тексте определение касательной как предельного положения секущей применимо к любым линиям.

Перпендикуляр, восставленный из середины хорды AB до пересечения с дугой AB, называется *стрелкой* дуги AB. Длина стрелки DC (рис. 114) называется *высотой* сегмента.

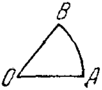


Рис. 115.

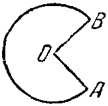


Рис. 116.

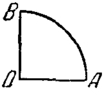


Рис. 117.

Сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, проведенными к концам дуги (рис. 115 и 116). Сектор, отсекаемый радиусами, образующими угол 90°, называется *квадрантом* (рис. 117).

§ 15. Углы в круге; длина окружности и дуги

Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами ($\angle AOB$ на рис. 118).

Вписанный угол — угол, образованный двумя хордами CA и CB, исходящими из одной точки окружности ($\angle ACB$ на рис. 119).

Описанный угол — угол, образованный двумя касательными CA и CB, исходящими из одной точки ($\angle ACB$ на рис. 120).

Длина дуги, описываемой концом радиуса, пропорциональна величине соответствующего центрального угла;

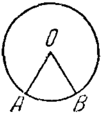


Рис. 118.

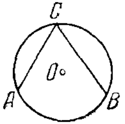


Рис. 119.

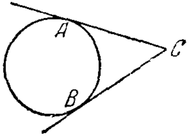


Рис. 120.

поэтому дуги одной и той же окружности можно измерять, как и углы, градусами (IV, Б, 5), Именно, за 1° дуги принимается $\frac{1}{360}$ часть окружности (т. е. дуга, центральный угол которой равен 1°). Вся окружность имеет 360°, половина ее содержит 180°

Во избежание часто происходящих ошибок необходимо отметить, что величина центрального угла совершенно не зависит от длины радиуса, тогда как величина соответствующей дуги пропорциональна радиусу.

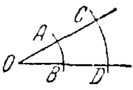


Рис. 121.

Так, на рис. 121 центральный угол сохраняет одну и ту же величину независимо от того, образуем ли мы его радиусами OC и OD или вдвое меньшими радиусами OA и OB. Дуги же AB и CD, хотя каждая из них имеет одно и то же число градусов, не равны по длине: дуга AB имеет меньшую длину, чем дуга CD.

Вообще длина дуги пропорциональна: 1) радиусу ее и 2) величине соответствующего центрального угла.

Длина окружности p составляет около $3\frac{1}{7}$ длины диаметра:

$$p \approx 3\frac{1}{7}d.$$

Иначе говоря, отношение длин окружности и диаметра составляет примерно $3\frac{1}{7}$:

$$\frac{p}{d} \approx 3\frac{1}{7}.$$

Точное отношение $\frac{p}{d}$ обозначается греческой буквой π («пи»):

$$\frac{p}{d} = \pi; \tag{1}$$

$3\frac{1}{7}$ есть приближенное (избыточное) значение числа π. Число π иррационально (см. III, 27), т. е. его нельзя точно записать в виде дроби. С точностью до пятого десятичного знака оно представляется числом 3,14159. Для практики достаточно взять приближение (недостаточное) $\pi \approx 3,14$, что дает несколько (но несущественно) меньшую точность, чем $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Формула (1) дает

$$p = \pi d, \tag{2}$$

или

$$p = 2\pi r \quad (\pi \approx 3,14). \tag{3}$$

Длина дуги в 1°

$$p_{1^\circ} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}. \tag{4}$$

Длина дуги в n°

$$p_{n^\circ} = \frac{\pi r n}{180}. \tag{5}$$

Формулы (2) — (5) [все они легко выводятся из формулы (1)] имеют большое теоретическое и практическое значение.

Пример 1. Из железной полосы длиной 2,4 *м* нужно изготовить обруч; на заклепку расходуется 0,2 *м* на концах. Определить радиус обруча.

Длина окружности $p = 2{,}4 - 0{,}2 = 2{,}2$ (*м*). Из формулы (3)

$$r = \frac{p}{2\pi} \approx \frac{2{,}2}{6{,}3} \approx 0{,}35 \text{ (м)}.$$

Пример 2. Диаметр ведущего колеса паровоза 1,5 *м*. Сколько оборотов в минуту делает колесо при скорости поезда 30 *км/час*?

За 1 мин. колесо пройдет $30 : 60 = \frac{1}{2}$ (*км*), т. е. 500 *м*. При одном обороте оно проходит путь, равный длине окружности p; $p = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 1{,}5 \approx 4{,}71$ *м*. Искомое число оборотов $500 : 4{,}71 \approx 106$.

Пример 3. Радиус железнодорожного закругления 800 *м*. Длина рельсового пути на нем 60 *м*. Сколько градусов в дуге закругления?

Из формулы (5)

$$n = \frac{180p}{\pi r} \approx \frac{180 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 800} \approx 4^\circ 20' \text{ (результат округлен).}$$

Площадь круга равна произведению полуокружности на радиус:

$$S = \frac{1}{2} pr, \quad \text{или} \quad S = \pi r^2.$$

Площадь сектора ($S_{\text{сект}}$) равна произведению половины длины дуги ($p_{\text{сект}}$) на радиус (r):

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} p_{\text{сект}} r.$$

Площадь сектора с дугой в n°

$$S_{n^\circ} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

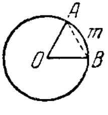


Рис. 122.

Площадь *сегмента* находится как разность площади сектора *AOBm* и треугольника *AOB* (рис. 122).

§ 15а. Формула Гюйгенса для длины дуги

На практике часто требуется найти длину дуги, данной на чертеже или в натуре, причем неизвестно, какую часть окружности составляет дуга и каков ее радиус. В таких случаях можно пользоваться следующим приемом.

Отметим на данной дуге $\breve{AB}$ (рис. 122а) ее середину M (она лежит на перпендикуляре CM, проведенном к хорде AB через ее середину C). Затем измерим хорду AB и

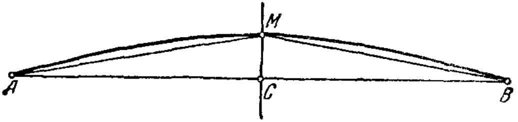


Рис. 122а.

хорду AM, стягивающую половинную дугу. Длина p дуги $\breve{AB}$ выражается (приближенно) следующей формулой Гюйгенса[1]):

$$p \approx 2l + \frac{1}{3}(2l - L),$$

где $l = AM$ и $L = AB$.

Относительная погрешность этой формулы составляет около 0,5%, когда $\breve{AB}$ содержит 60°. С уменьшением угловой меры дуги процент погрешности резко падает. Так, для дуги в 45° относительная погрешность составляет примерно 0,02%.

Пример. На рис. 122а изображена дуга $\breve{AB}$, для которой $l = AM = 34{,}0$ *мм*, $L = AB = 67{,}1$ *мм*. Формула Гюйгенса дает

$$p = 2 \cdot 34{,}0 + \frac{1}{3}(2 \cdot 34{,}0 - 67{,}1) \approx 68{,}3 \ (\text{мм}).$$

Здесь все цифры верны, так как дуга $\breve{AB}$ (это видно на глаз) содержит примерно 45° и, значит, погрешность формулы составляет примерно 0,02%, т. е. меньше чем 0,05 *мм*.

---

1) Христиан Гюйгенс (1629—1695) — голландский ученый, знаменитый своими работами в области оптики и механики.

§ 16. Измерение углов в круге

Вписанный угол составляет половину центрального, опирающегося на ту же дугу. На рис. 123 $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$. Поэтому все вписанные углы, опирающиеся на данную дугу, равны между собой. На рис. 124 $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$. Иначе, хорда AB видна под одним и тем же углом из всех точек опирающейся на нее дуги.

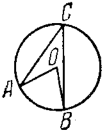


Рис. 123.

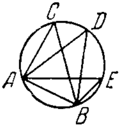


Рис. 124.

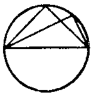


Рис. 125.

Говорят, дуга $ACDEB$ ***вмещает*** угол определенной величины. Например, полуокружность вмещает угол 90° (рис. 125).

Так как центральный угол содержит столько же градусов (угловых), сколько его дуга (дуговых), то ***вписанный угол*** ($\angle ACB$, рис. 123) измеряется половиной дуги AB, на которую он опирается.

Угол, составленный двумя хордами (например, $\angle AOB$, рис. 126), измеряется полусуммой $\frac{1}{2}(\overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{AB})$ дуг, заключенных между его сторонами (продолженными в обе стороны).

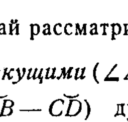


Рис. 126.

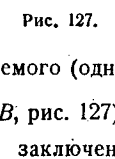


Рис. 127.

Вписанный угол — частный случай рассматриваемого (одна из дуг равна нулю).

Угол, составленный двумя секущими ($\angle AOB$, рис. 127), измеряется полуразностью $\frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} - \overset{\smile}{CD})$ дуг, заключенных между двумя его сторонами. Вписанный угол — частный случай угла между двумя секущими ($\overset{\smile}{CD} = 0$).

Рассматривая касательную как вырождение секущей (IV, Б, 14), получаем отсюда: *угол, составленный* *касательной и хордой* (например, ABC, рис. 128), измеряется половиной дуги, заключенной внутри него $\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AnB}\right)$; *угол, составленный касательной и секущей* (например, $\angle BOA$, рис. 129), измеряется полуразностью $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA}-\overset{\frown}{DA})$ заключенных между его сторонами дуг; *описанный угол* ($\angle COA$, рис. 129) измеряется полуразностью $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CBA}-\overset{\frown}{CDA})$ заключенных между его сторонами дуг.

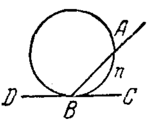


Рис. 128.

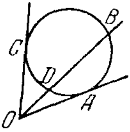


Рис. 129.

§ 17. Степень точки

Степенью точки O относительно данной окружности радиуса r называется величина d^2-r^2, где d — расстояние OC от точки до центра окружности. Степень внешней точки положительна, внутренней — отрицательна. Для точек окружности степень равна нулю.

Абсолютная величина степени точки $|d^2-r^2|$ обозначается через p^2, так что для внешней точки $p^2=d^2-r^2$, а для внутренней $p^2=r^2-d^2$. Величины p^2 и p (последняя предполагается положительной) играют важную роль.

Именно, пусть через точку O (рис. 130 и 131) проводятся всевозможные секущие (AB, DE, FG и т. д.). Про-

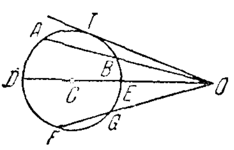


Рис. 130.

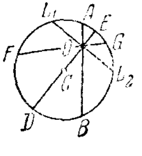


Рис. 131.

изведение длин отрезков секущей от точки O до точек ее пересечения с окружностью ($OA \cdot OB$, или $OD \cdot OE$, или $OF \cdot OG$ и т. д.) есть величина постоянная и равна p^2. Особенно важен случай, когда секущая проходит через центр C (см. примеры ниже).

Если точка O — внешняя (рис. 130), то, рассматривая касательную как вырождение секущей, имеем $OT^2 = p^2$, т. е. *абсолютная величина степени точки есть квадрат длины касательной*. Величина p, таким образом, равна длине касательной OT.

Если точка O — внутренняя (рис. 131), то, проводя через O хорду L_1L_2, перпендикулярную к диаметру DE, имеем $OL_1 = OL_2$, так что $OL_1^2 = p^2$, т. е. *степень точки равна квадрату наименьшей полухорды, проходящей через эту точку*. Величина p, таким образом, равна длине полухорды OL_1.

Пример 1. Какова дальность ви́дения с самолета, летящего над морем на высоте 2 *км*? (Диаметр Земли 12 700 *км*.)

На рис. 132 дан (схематически) вертикальный разрез Земли. O — местонахождение самолета, $OE = 2$ *км*, $ED \approx 12\,700$ *км*. Наиболее удаленная точка Земли, видимая

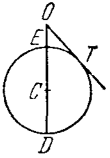


Рис. 132.

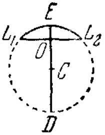


Рис. 133.

с самолета, есть точка T; OT — касательная к окружности ETD; $OT = p$. С другой стороны, $p^2 = OE \cdot OD \approx 2 \cdot 12\,700$ (мы берем $OD \approx 12\,700$ *км*, отбрасывая 2 *км* как величину заведомо меньшую, чем предельная погрешность приближенной величины 12 700 *км*). Отсюда

$$p = \sqrt{25\,400} \approx 160 \text{ (км)}.$$

Пример 2. Пролет каменного свода составляет 6 *м*; стрелка его 0,4 *м*. Определить радиус дуги свода.

На рис. 133 (схематическом) $L_1L_2 = 6$ *м*, $EO = 0{,}4$ *м*. Степень точки O равна $p^2 = OL_1^2 = \left(\frac{L_1L_2}{2}\right)^2 = 9$. С другой стороны, $p^2 = EO \cdot OD$; так как EO невелико сравнительно с OD, можно принять $OD = 2r$, и получаем $9 \approx 0{,}4 \cdot 2r$. Отсюда

$$r = \frac{9}{0{,}8} \approx 11\frac{1}{4} \text{ (м)}.$$

§ 18. Радикальная ось; радикальный центр

Геометрическое место точек M (рис. 134, 135, 136, 137, 138), имеющих равные степени относительно двух данных окружностей O_1, O_2 ($MK_1 = MK_2$), есть прямая линия AB, перпендикулярная к линии центров.

Эта прямая называется *радикальной осью* кругов O_1 и O_2. Расстояния d_1, d_2 радикальной оси от центров O_1, O_2

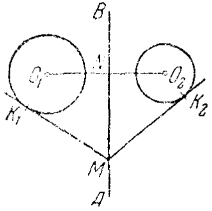


Рис. 134.

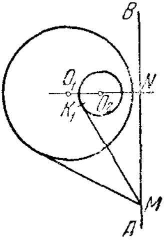


Рис. 135.

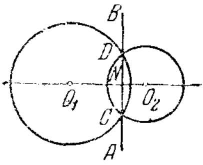


Рис. 136.

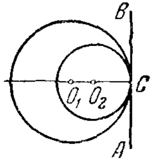


Рис. 137.

данных окружностей можно вычислить по формулам

$$d_1 = O_1N = \frac{d}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d},$$

$$d_2 = NO_2 = \frac{d}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2d},$$

где d есть расстояние O_1O_2 между центрами кругов, а r_1 и r_2 — радиусы кругов. Гораздо проще найти радикальную ось с помощью построения. Если окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках C, D, то каждая из этих точек имеет нулевую степень относительно обоих кругов и, значит, радикальная ось проходит через C и D (рис. 136). Если окружности касаются в точке C (рис. 137, 138), то радикальной их осью служит общая касательная. Для непересекающихся кругов радикальную ось можно найти так. Построим (рис. 139) вспомогательную окружность O_3, пересекающую окружность O_1 в точках C, D и окруж-

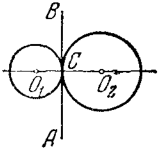


Рис. 138.

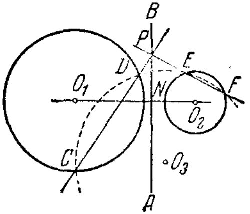


Рис. 139.

ность O_2 в точках E, F. Прямые CD, EF суть радикальные оси двух пар окружностей O_1, O_3 и O_2, O_3. Поэтому точка их пересечения P имеет одинаковую степень относительно O_1, O_3, а также относительно O_2, O_3. Значит, она имеет одинаковые степени относительно O_1 и O_2, т. е. лежит на радикальной оси двух данных кругов. Найдя таким же образом еще одну точку или опустив перпендикуляр PN из P на O_1O_2, найдем искомую радикальную ось.

Это рассуждение показывает, что три радикальные оси любых трех попарно взятых кругов O_1, O_2, O_3 пересе-

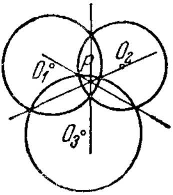


Рис. 140.

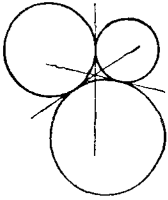


Рис. 141.

каются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* кругов O_1, O_2, O_3. В частности, три общие хорды трех попарно пересекающихся окружностей (рис. 140) пересекаются в одной точке. Три общие касательные трех попарно касающихся кругов (рис. 141) тоже пересекаются в одной точке.

§ 19. Вписанные и описанные многоугольники

Вписанным в круг многоугольником называется такой многоугольник, вершины которого лежат на окружности (рис. 142); *описанным около круга многоугольником* называется такой многоугольник, стороны которого касаются окружности (рис. 143).

Описанной около многоугольника окружностью называется окружность, проходящая через его вершины (рис. 142); *вписанной в многоугольник окружностью* называется окружность, касающаяся его сторон (рис. 143). Если многоугольник взят произвольно, то в него нельзя вписать и около него нельзя описать окружность. В случае треугольника всегда можно построить как вписанную, так и описанную окружность (см. IV, А, пп. 20—21 и IV, Б, 9).

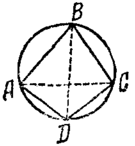


Рис. 142.

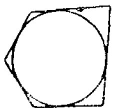


Рис. 143.

Радиус r вписанного круга выражается через стороны a, b, c треугольника формулой

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \left(p=\frac{a+b+c}{2}\right).$$

Радиус R описанного круга выражается формулой

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

В четырехугольник окружность можно вписать лишь в том случае, если суммы его противоположных сторон одинаковы; из всех параллелограммов лишь в ромб (в частности, в квадрат) можно вписать окружность. Центр ее лежит на пересечении диагоналей.

Около четырехугольника окружность можно описать лишь в том случае, если сумма противоположных углов равна 180° (если это обнаружено для одной пары противолежащих углов, то другая пара непременно составит в сумме также 180°). Из всех параллелограммов лишь около прямоугольника (в частности, квадрата) можно описать окружность; центр ее лежит на пересечении диагоналей.

Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.

В выпуклом четырехугольнике, вписанном в круг, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея) На рис. 142

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

§ 20. Правильные многоугольники

Правильный многоугольник — многоугольник с равными сторонами и углами. На рис. 144 и 145 изображены правильные шестиугольник и восьмиугольник. Правильный

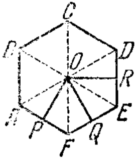


Рис 144

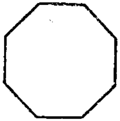


Рис. 145.

четырехугольник есть квадрат; правильный треугольник — равносторонний. Каждый угол правильного n-угольника равен $\frac{180° (n-2)}{n}$

Внутри правильного многоугольника имеется точка O (рис. 144), равноотстоящая от всех его вершин ($OA = OB = OC$ и т. д.), — *центр* правильного многоугольника. Центр равноудален и от сторон правильного многоугольника ($OP = OQ = OR$ и т. д.).

Отрезки OP, OQ и т. д. называются *апофемами*; отрезки OA, OB и т. д. — *радиусами* правильного многоугольника.

Площадь правильного многоугольника равна произведению полупериметра на апофему:

$$S = ph,$$

где

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + \ldots), \quad h = OP.$$

Около правильного многоугольника можно описать и в него можно вписать окружность. Центры вписанной и описанной окружности лежат в центре правильного многоугольника. Радиус описанной окружности есть радиус правильного многоугольника; радиус вписанной окружности его апофема. (Построение вписанных и описанных многоугольников см. IV, А, пп. 30—38.) Сторона b_n правильного описанного многоугольника выражается через сторону a_n правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон формулой

$$b_n = Ra_n : \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} a_n^2} \quad (R \text{ — радиус круга}).$$

Сторона a_{2n} правильного вписанного многоугольника с удвоенным числом сторон выражается через a_n формулой

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4} a_n^2}}\,.$$

Следующие формулы дают выражения соотношений между сторонами некоторых правильных вписанных многоугольников и радиусом круга:

$$a_3 = R\sqrt{3} \approx 1{,}7321R;$$

$$a_4 = R\sqrt{2} \approx 1{,}4142R;$$

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}1755R;$$

$$a_6 = R;$$

$$a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0{,}7654R;$$

$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}6180R;$$

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 0{,}5176R;$$

$$a_{15} = \frac{1}{4}R\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1)\right] \approx 0{,}4158R.$$

Выражения для a_3, a_4, a_6 часто применяются на практике; их желательно помнить; вычисление сторон остальных многоугольников удобнее всего производить по формулам тригонометрии (см. V, 13) с помощью таблиц. Для большинства многоугольников отношения $a_n : R$ не могут быть выражены в виде алгебраических формул даже с помощью нагромождения радикалов.

Пример. Можно ли из бревна, имеющего поперечник 40 *см*, выпилить квадратный брус шириной в 36 *см*?

Поперечное сечение бревна можно принять за круг радиуса

$$R = \frac{40}{2} = 20 \ (см).$$

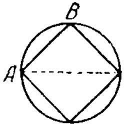


Рис. 146.

Наибольшим квадратом, помещающимся в круге, является квадрат, вписанный в него. Его сторона AB (рис. 146) равна $20\sqrt{2} \approx 20 \cdot 1{,}41 \approx 28$ (*см*). Поэтому бруса шириной 36 *см* из бревна выпилить нельзя.

§ 21. Площади плоских фигур

В этом параграфе собраны важнейшие формулы для площадей S плоских фигур (некоторые из них были приведены в соответствующих параграфах).

Квадрат (рис. 103 на стр. 284). a — сторона; d — диагональ:

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Прямоугольник (рис. 101 на стр. 284). a, b — стороны.

$$S = ab.$$

Ромб (рис. 102). a — сторона; d_1, d_2 — диагонали; α — один из углов (острый или тупой):

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} = a^2 \sin \alpha.$$

Параллелограмм (рис. 100 на стр. 283). a, b — стороны; α — один из углов (острый или тупой); h — высота:

$$S = ah = ab \sin \alpha.$$

Рис. 147.

Трапеция (рис. 104, 106 на стр. 285). a, b — основания; h — высота; c — средняя линия:

$$S = \frac{a+b}{2} h = ch.$$

Любой четырехугольник. d_1, d_2 — диагонали; α — угол между ними (рис. 147):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

Четырехугольник, около которого можно описать окружность (IV, А, 22). a, b, c, d — стороны:

$$p = \frac{a+b+c+d}{2};$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Прямоугольный треугольник (рис. 93 на стр. 281). a, b — катеты:

$$S = \frac{1}{2} ab.$$

Равнобедренный тр-к (рис. 77 на стр. 277). a — основание; b — боковая сторона:

$$S = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Равносторонний тр-к (рис. 78 на стр. 277). a — сторона:

$$S = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}.$$

Любой тр-к. a, b, c — стороны; a — основание; h — высота; A, B, C — углы, лежащие против сторон a, b, c; $p = \frac{a+b+c}{2}$ (рис. 148):

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{h^2 \cdot \sin A}{2 \sin B \sin C} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Многоугольник, площадь которого требуется найти, разбивается любым образом на треугольники (например, диаго-

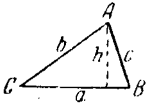


Рис. 148.

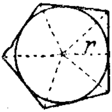


Рис. 149.

налями). Многоугольник, описанный около круга, удобно разбивать прямыми, идущими от центра круга к вершинам многоугольника (рис. 149). Тогда получаем:

$$S = rp,$$

где r — радиус круга, p — полупериметр.

В частности, эта формула имеет место для всякого правильного многоугольника.

Правильный шестиугольник. a — сторона:

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2.$$

Круг. d — диаметр; r — радиус; C — длина окружности:

$$S = \frac{1}{2}Cr = \pi r^2\ (\approx 3{,}142r^2) = \pi\frac{d^2}{4}\ (\approx 0{,}785d^2).$$

Сектор. r — радиус; n — градусная мера центрального угла; p_{n° — длина дуги (рис. 150):

$$S = \frac{1}{2}rp_{n^\circ} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

Круговое кольцо. R, r — внешний и внутренний ра-

Рис. 150.

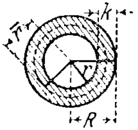


Рис. 151.

Рис. 152.

диусы (рис. 151); D, d — внешний и внутренний диаметры; $\bar{r}$ — средний радиус; k — ширина кольца:

$$S = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\bar{r}k.$$

Сегмент. Площадь сегмента (рис. 152) находится как разность площадей сектора $OAmB$ и тр-ка AOB.

§ 21а. Приближенная формула площади сегмента

На практике часто требуется найти площадь сегмента, данного на чертеже или в натуре, причем неизвестно, какую часть окружности составляет дуга сегмента и каков ее радиус. В таких случаях пользуются следующей приближенной формулой:

$$S \approx \frac{2}{3}ah,$$

где $a = AB$ (рис. 152а) — основание сегмента, $h = CM$ — его высота. Иными словами, считают, что сегмент по площади равен $\frac{2}{3}$ прямоугольника $ABED$. На самом деле площадь сегмента несколько больше. При $\breve{AB} = 60°$ относительная погрешность формулы составляет 1,5%; при $\breve{AB} = 45°$ она вдвое меньше; при $\breve{AB} = 30°$ она составляет 0,3% и в дальнейшем снижается еще быстрее.

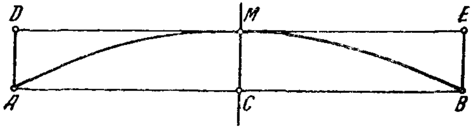


Рис. 152а.

Пример. Найти площадь сегмента AMB (рис. 152а), у которого основание $a = 60{,}0$ *мм*, а высота $h = 8{,}04$ *мм*.

Решение. $S \approx \frac{2}{3} \cdot 60{,}0 \cdot 8{,}04 \approx 321$ (*мм*²). Однако третья цифра заведомо неверна, так как дуга $\breve{AB}$ (это видно на глаз) содержит примерно 60° и, значит, погрешность формулы составляет 1,5%, т. е. примерно 5 *мм*². Если сделать соответствующую поправку, то найдем, что $S \approx 326$ *мм*². Здесь все цифры верны.

В. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§ 1. Общие замечания

Стереометрия изучает геометрические свойства пространственных тел и фигур. При решении стереометрических задач важнейшим приемом является рассмотрение плоских линий и фигур как тех, которые непосредственно обнаруживаются в изучаемом предмете, так и тех, которые строятся в качестве вспомогательных. Поэтому очень важно научиться распознавать и выделять в пространственных образах разнообразные плоские фигуры.

§ 2. Основные понятия

Подобно тому как в планиметрии из всех линий особенно выделяется простейшая линия — прямая, в стереометрии из всех поверхностей особенно выделяется плоская поверхность — *плоскость*. *Плоскость* и *прямая линия* — основные элементы стереометрии.

Через всякие три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести одну и только одну плоскость. Через три точки, лежащие на одной прямой, можно провести бесчисленное множество плоскостей, образующих *пучок* плоскостей; прямая, через которую проходят все плоскости пучка, называется его *осью*.

Через любую прямую и не лежащую на ней точку можно провести одну и только одну плоскость.

Через две прямые плоскость можно провести не всегда. Две прямые, через которые нельзя провести плоскость, называются *скрещивающимися*.

Пример. Горизонтальная прямая, начерченная на одной стене комнаты, и вертикальная прямая, начерченная на противоположной стене, являются скрещивающимися.

Скрещивающиеся прямые не пересекаются друг с другом, сколько бы их ни продолжать, но их не называют параллельными.

Параллельными называются только такие две непересекающиеся прямые, через которые можно провести плоскость (ср. IV, Б, 11).

Различие между параллельными прямыми и скрещивающимися наглядно характеризуется тем, что две параллельные прямые имеют одно и то же направление, тогда как направления скрещивающихся прямых различны.

Все точки одной параллельной прямой находятся на одинаковом расстоянии от другой (расстояние измеряется по перпендикуляру), тогда как точки одной из скрещивающихся прямых находятся на различных расстояниях от другой.

Через две пересекающиеся прямые всегда можно провести одну и только одну плоскость.

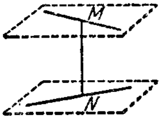


Рис. 153.

Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина отрезка MN, соединяющего ближайшие друг к другу точки M и N (рис. 153), лежащие на скрещивающихся прямых. Прямая MN перпендикулярна к обеим скрещивающимся прямым.

Расстояние между параллельными прямыми определяется, как в планиметрии. Расстояние между пересекающимися прямыми считается равным нулю.

Две плоскости могут пересекаться (по прямой линии) или не пересекаться. Непересекающиеся плоскости называются *параллельными.*

Прямая и плоскость также либо пересекаются (в одной точке), либо не пересекаются; в последнем случае говорят, что *прямая параллельна плоскости* (или что плоскость параллельна прямой).

§ 3. Углы

Угол между двумя пересекающимися прямыми измеряется так же, как это делается в планиметрии (ибо через две такие прямые можно провести плоскость). *Угол между параллельными прямыми* считается равным нулю

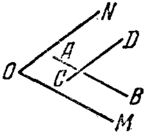


Рис. 154.

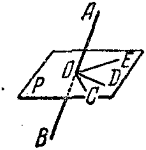


Рис. 155.

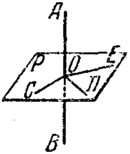


Рис. 156.

или 180°; см. IV, Б, 11). *Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD* (рис. 154) [1]) определяется так: через любую точку O проводят лучи $OM \parallel AB$ и $ON \parallel CD$. Угол между AB и CD считается равным углу NOM. Другими словами, прямые AB и CD переносятся в новое положение параллельно самим себе до пересечения их друг с другом. В частности, можно O взять на одной из прямых AB, CD, которая тогда останется неподвижной.

Прямая AB, пересекающая плоскость P в точке O, образует с различными прямыми OC, OD, OE, проведенными на плоскости P через точку O, вообще говоря, различные углы (углы AOC, AOD, AOE, рис. 155). Если она перпендикулярна к двум таким прямым (например, OE, OD), то она перпендикулярна и ко всем другим прямым, проходящим через O (например, OC). Тогда прямую

[1]) На прямой AB (и на прямой CD) можно по произволу установить направление: от A к B или от B к A (от C к D или от D к C). В первом случае прямую обозначают AB, во втором BA.

OA (рис. 156) называют *перпендикулярной* к плоскости P, а плоскость P — перпендикулярной к прямой OA.

Прямоугольной проекцией (или просто проекцией) *точки A на плоскость P* называется основание C перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость P. *Проекция отрезка AB на плоскость P* есть отрезок CD, концами

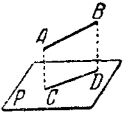


Рис. 157.

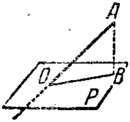


Рис. 158.

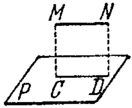


Рис. 159.

которого служат проекции концов отрезка AB (рис. 157). Проектирование есть один из основных приемов геометрического исследования (см. IV, Б, 4). С помощью проектирования определяется угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой OA и плоскостью P называется угол, образуемый прямой OA и ее проекцией OB на плоскость P (рис. 158). Если прямая MN параллельна плоскости P (рис. 159), то она параллельна своей проекции и (острый) угол между MN и плоскостью P считается равным нулю.

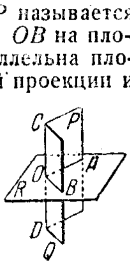


Рис. 160.

Фигура, образованная двумя полуплоскостями P и Q, исходящими из одной прямой CD (рис. 160), называется *двугранным углом*. Прямая CD называется *ребром* двугранного угла; плоскости P и Q называются его *гранями*.

Плоскость R, перпендикулярная к ребру двугранного угла, в пересечении с гранями P и Q дает угол AOB, называемый *линейным углом* двугранного угла.

За *меру* двугранного угла принимают величину его линейного угла. Вместо «мера двугранного угла есть 30°» говорят «двугранный угол равен 30°» и т. п.

Часто говорят также «угол между двумя плоскостями», подобно тому как в планиметрии говорят «угол между двумя прямыми». При этом имеется в виду один из четырех углов, образованных плоскостями (обычно острый) [1].

---

[1]) Вертикальные и смежные двугранные углы определяются так же, как вертикальные и смежные углы между прямыми. Вертикальные двугранные углы равны друг другу; смежные в сумме составляют 180°.

Угол (острый) *между двумя параллельными плоскостями* считается равным нулю; в прямом смысле мы здесь вообще не имеем угла.

Две плоскости, образующие друг с другом прямой угол, называются *перпендикулярными.*

Углы, образованные двумя прямыми AB и CD, соответственно перпендикулярными к плоскостям P и Q (рис. 161), равны углам между P и Q (острые — острым, тупые — тупым). Поэтому меру угла между двумя плоскостями P и Q можно определить еще иначе, а именно как величину угла, образованного прямыми AB и CD.

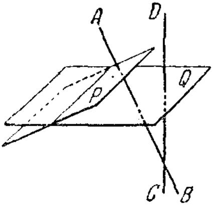


Рис. 161.

§ 4. Проекции

На плоскость можно проектировать не только прямую, но и любую линию, как умещающуюся в какой-либо плоскости, так и не умещающуюся. Пусть $ABCDE$ (рис. 162) — какая-нибудь линия (кривая или ломаная). Будем непрерывно передвигать точку вдоль этой линии. Когда точка будет занимать положения A, B, C, D и т. д., ее проекция (IV, В, 3) будет, перемещаясь, занимать положения a, b, c, d и т. д. *Линия* $abcde$, *описанная* проекцией движущейся по линии $ABCDE$ точки, называется *проекцией* линии $ABCDE$. Форма проекции, хотя сама и зависит всецело от формы проектируемой линии, не определяет форму проектируемой линии. Но если известны проекции некоторой линии $ABCDE$ *на две плоскости*, то этим определяется[1]) и форма самой линии $ABCDE$. Этот факт лежит в основе метода *начертательной геометрии*, в которой геометрическая фигура изучается с помощью ее проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости.

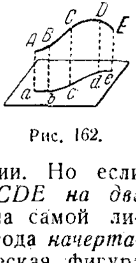


Рис. 162.

При проектировании линии на плоскость форма ее подвергается изменению. Так, например, если спроектировать на плоскость P круг (рис. 163), плоскость Q которого не параллельна плоскости P, то в проекции получается овальная кривая, называемая *эллипсом.*

---

[1]) За исключением некоторых особых случаев расположения линии.

Если замкнутая линия, лежащая в плоскости Q, проектируется на плоскость P, то площадь S_1, ограниченная проекцией, связана с площадью S, ограниченной проектируемой фигурой, соотношением

$$S_1 = S\cos\alpha,$$

где α — угол между плоскостями P и Q.

Аналогичная формула связывает длину a отрезка AB (рис. 157 на стр. 307) с длиной a_1 его проекции CD на плоскость P:

$$a_1 = a\cos\alpha,$$

где α — угол между прямой AB и плоскостью P.

Часто пользуются также проектированием точек и отрезков *на прямую (ось проекций)*.

Пусть имеем прямую AB и точку M (рис. 164). Проведем через M плоскость, перпендикулярную к прямой AB.

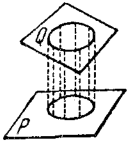


Рис. 163.

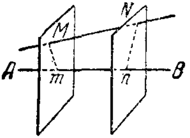


Рис. 164.

Она пересечет AB в некоторой точке m; точка m называется *проекцией точки M на прямую AB*.

Проектируя концы M и N отрезка MN на прямую AB, мы получаем точки m и n; ограничиваемый ими отрезок называется *проекцией отрезка MN на прямую AB* [1]). Длина a отрезка MN связана с длиной a_1 его проекции mn формулой

$$a_1 = a\cos\alpha,$$

где α — угол между прямыми MN и AB. Проекции отрезков на прямую можно считать величинами алгебраическими совершенно так же, как при проектировании в одной плоскости (см. IV, Б, 10). Тогда имеет место теорема, аналогичная планиметрической: *сумма проекций звеньев ломаной линии равна проекции замыкающего отрезка.*

[1]) Обратите внимание на то, что Mm и Nn перпендикулярны к AB, но в общем случае (ср. рис. 153 на стр. 305) не параллельны между собой; они скрещиваются, если прямые AB и MN являются скрещивающимися.

§ 5. Многогранный угол

Если через точку O (рис. 165) проведен ряд плоскостей AOB, BOC, COD и т. д., последовательно пересекающих друг друга по прямым OB, OC, OD и т. д. (последняя плоскость AOE пересекает первую по прямой OA), то полученная фигура называется *многогранным углом*. Точка O называется *вершиной* многогранного угла.

Плоскости, образующие многогранный угол, называются его *гранями*; прямые, по которым пересекаются последовательные грани, называются *ребрами* многогранного угла. Углы AOB, BOC и т. д. называются его *плоскими углами*.

Наименьшее число граней многогранного угла — три (*трехгранный угол*, рис. 166). Каждый плоский угол трех-

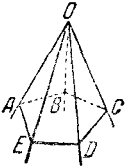


Рис. 165.

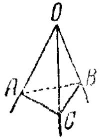


Рис. 166.

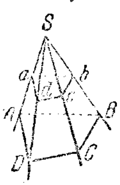


Рис. 167.

гранного угла меньше суммы и больше разности двух других плоских углов.

Сечение многогранного угла плоскостью (не проходящей через вершину) есть многоугольник ($ABCDE$ на рис. 165)[1]. Если он выпуклый, многогранный угол называется *выпуклым*. *В выпуклом многогранном угле сумма плоских углов не превосходит* 360°.

Параллельные плоскости отсекают на ребрах многогранного угла (рис. 167) пропорциональные отрезки ($SA:Sa = SB:Sb$ и так далее) и образуют подобные многоугольники ($ABCD$ и $abcd$).

§ 6. Многогранники; призма, параллелепипед, пирамида

Многогранником называется тело, граница которого состоит из кусков плоскостей (многоугольников). Эти многоугольники называются *гранями*, их стороны — *реб-*

[1]) В элементарной геометрии рассматриваются только такие многогранные углы, у которых контур $ABCDE$ не имеет самопересечений. Простой многогранный угол выделяет часть пространства; ее также называют многогранным углом. Об измерении многогранных углов см. IV. В. 14.

рами, их вершины — *вершинами многогранника.* Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются *диагоналями многогранника. Выпуклым* многогранником называется многогранник, все диагонали которого лежат внутри него.

Призмой (рис. 168) называется многогранник, у которого две грани $ABCDE$ и $abcde$ (основания призмы) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани ($AabB$, $BbcC$ и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой (Aa, или Bb, или Cc и т. д.). Параллелограммы $ABba$, $BCcb$ и т. д. называются *боковыми гранями.* Ребра Aa, Bb и т. д. называются *боковыми. Высотой* призмы называется перпендикуляр Mm, опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого. Призма называется треугольной, четырехугольной и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и т. д.

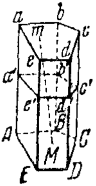


Рис. 168.

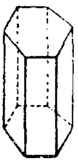


Рис. 169.

Если боковые ребра призмы перпендикулярны к плоскости основания, призма — *прямая*; если нет — *наклонная.* Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма — *правильная.* На рис. 168 — наклонная пятиугольная призма. На рис. 169 — правильная шестиугольная призма.

Перпендикулярным сечением $a'b'c'd'e'$ призмы называется сечение, образованное плоскостью перпендикулярной к боковому ребру (рис. 168).

Боковая поверхность призмы равна произведению периметра (p') перпендикулярного сечения на длину (l) бокового ребра:

$$S_{\text{бок}} = p'l.$$

Для прямой призмы перпендикулярным сечением является основание, боковым ребром — высота h, так что

$$S_{\text{бок}} = ph.$$

Объем (V) призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения (S') на длину (l) бокового ребра:

$$V = S'l,$$

или площади основания (S) на высоту, т. е.

$$V = Sh.$$

Параллелепипедом называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 170); таким образом, параллелепипед имеет шесть граней и все они — параллелограммы. Противоположные грани попарно равны и параллельны. Параллелепипед имеет четыре диагонали; все они пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам. За основание может быть принята любая грань; объем равен произведению площади основания на высоту:

$$V = Sh.$$

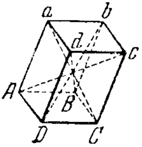


Рис. 170.

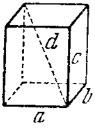


Рис. 171.

Параллелепипед, четыре боковые грани которого — прямоугольники, называется *прямым*.

Прямой параллелепипед, у которого все шесть граней — прямоугольники, называется *прямоугольным* (рис. 171). Объем (V) прямого параллелепипеда равен произведению площади основания (S) на высоту (h):

$$V = Sh.$$

Для прямоугольного параллелепипеда, кроме того, имеет место формула

$$V = abc,$$

где a, b, c — ребра.

Диагональ (d) прямоугольного параллелепипеда связана с ребрами его соотношением

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Прямоугольный параллелепипед, все грани которого — квадраты, называется *кубом*. Все ребра куба равны; объем (V) куба выражается формулой

$V = a^3$, где a — ребро куба.

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань - *основание* пирамиды — произвольный многоугольник ($ABCDE$, рис. 172), а остальные — *боковые* грани —

треугольники с общей вершиной S, называемой *вершиной* пирамиды. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется *высотой пирамиды*. Пирамида называется треугольной, четырехугольной и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырехугольник и т. д. Треугольная пирамида есть четырехгранник (тетраэдр), четырехугольная — пятигранник и т. д.

Пирамида называется *правильной*, если основание ее — правильный многоугольник (рис. 173) и высота падает в центр основания. В правильной пирамиде все боковые

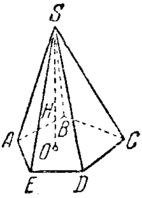


Рис. 172.

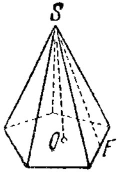


Рис. 173.

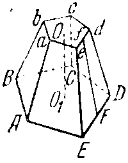


Рис. 174.

ребра равны: все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота (SF) боковой грани называется *апофемой* правильной пирамиды.

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания $\left(\frac{1}{2}p\right)$ *на апофему* (a):

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}pa.$$

Объем всякой пирамиды равен одной трети произведения площади основания (S) *на высоту* (h):

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

Если в пирамиде провести сечение $abcde$, параллельное основанию $ABCDE$ (рис. 174), то тело, ограниченное этим сечением, основанием и заключенной между ними частью боковой поверхности пирамиды, называется *усеченной пирамидой*. Параллельные грани усеченной пирамиды ($ABCDE$ и $abcde$) называются ее *основаниями*; расстояние между ними (OO_1) — *высотой*. Усеченная пирамида называется *правильной*, если пирамида, из которой она получена, была правильной. Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобочные трапеции.

Высота Ff боковой грани называется *апофемой* правильной усеченной пирамиды.

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\,a,$$

где p_1, p_2 — периметры оснований; a — апофема.

Объем V всякой усеченной пирамиды равен трети произведения высоты на сумму площадей верхнего основания, нижнего основания и средней пропорциональной между ними:

$$V = \frac{1}{3}h\,(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

где S_1 — площадь $ABCDE$, S_2 — площадь $abcde$, h — высота OO_1.

В частности, объем V правильной четырехугольной усеченной пирамиды выражается формулой

$$V = \frac{1}{3}\,h(a^2 + ab + b^2),$$

где a и b — стороны квадратов, лежащих в основаниях.

§ 7. Цилиндр

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой (AB, рис. 175), сохраняющей одно и то же направление и пересекающей данную линию MN. Линия MN называется *направляющей*; прямые линии, соответствующие различным положениям прямой AB, называются *образующими* цилиндрической поверхности. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью (с замкнутой направляющей) и двумя параллельными плоскостями, называется *цилиндром* (рис. 176). Части параллельных плоскостей, ограничивающих цилиндр ($ABCDE$ и $abcde$), называются *основаниями* цилиндра. Расстояние между основаниями называется *высотой* цилиндра (на рис. 176 — MN).

Призма есть частный вид цилиндра (образующие параллельны боковым ребрам; направляющая — многоугольник, лежащий в основании). С другой стороны, произвольный цилиндр можно рассматривать как выродившуюся («сглаженную») призму с очень большим числом очень узких граней. Практически цилиндр неотличим от такой призмы. Все свойства призмы сохраняются и в цилиндре (см. ниже).

Цилиндр — *прямой*, если его образующие перпендикулярны к основанию; в противном случае — *наклонный*. Цилиндр — *круговой*, если в основании его лежит круг. Если цилиндр одновременно прямой и круговой, он называется *круглым* (рис. 177). Круглый цилиндр можно рассматривать как вырождение правильной призмы. Форму

Рис. 175.

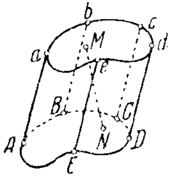


Рис. 176.

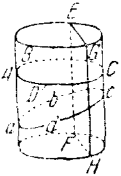


Рис. 177.

круглого цилиндра имеют многие ходовые предметы (трубы, стаканы и др.). Круглый цилиндр можно получить, вращая прямоугольник вокруг одной из его сторон, поэтому круглый цилиндр называется также *цилиндром вращения*.

Сечения боковой поверхности кругового цилиндра [1]), параллельные основанию ($ABCD$ на рис. 177), — окружности одинакового радиуса. Сечения, параллельные образующей, — пары параллельных прямых (EF и HG). Сечения, не параллельные ни основанию, ни образующей ($abcd$), — эллипсы (см, IV, В, 4).

Боковая поверхность цилиндра равна произведению образующей на длину линии, ограничивающей сечение, перпендикулярное к образующей. Для прямого цилиндра таким сечением является основание, а образующая является высотой. Поэтому

***Боковая поверхность круглого цилиндра равна произведению окружности основания на высоту*:**

$$S_{бок} = 2\pi rh.$$

***Объем всякого цилиндра равен произведению площади основания на высоту*:**

$$V = Sh.$$

Для круглого цилиндра

$$V = \pi r^2 h \ (r \text{ — радиус основания}).$$

---

[1]) Боковую поверхность мы предполагаем продолженной за основания цилиндра.

§ 8. Конус

Конической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой (AB на рис. 178), проходящей все время через неподвижную точку (S) и пересекающей данную линию (MN)[1].

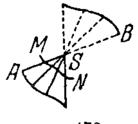


Рис. 178.

Линия MN называется *направляющей*; прямые линии, соответствующие различным положениям AB, называются *образующими* конической поверхности; точка S — ее *вершиной*. Коническая поверхность имеет две полости: одна описывается лучом SA, другая — его продолжением SB.

Часто под конической поверхностью разумеют одну из ее полостей.

Конусом называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности (с замкнутой направляющей) и пересекающей ее плоскостью ($ABCDEFGHJ$, рис. 179), не проходящей через вершину S. Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется *основанием* конуса. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется *высотой* конуса.

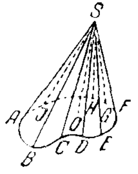


Рис. 179.

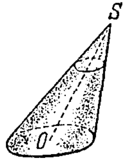


Рис. 180.

Пирамида есть частный вид конуса (направляющая — многоугольник); произвольный конус есть вырождение пирамиды.

Конус называется *круговым* (рис. 180), если основание его — круг.

Рис. 181.

Прямая SO, соединяющая вершину конуса и центр основания, называется *осью конуса*. Если высота кругового конуса падает в центр основания, он называется *круглым* конусом (рис. 181). Круглый конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника около одного из катетов. Поэтому круглый конус называют также *конусом вращения*.

---

[1]) В элементарной геометрии рассматриваются только такие конические поверхности, у которых нет самопересечений.

Сечение кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг (рис. 180). О сечениях конуса плоскостями, не параллельными основанию, см. § 9.

Боковая поверхность круглого конуса равна произведению половины окружности основания (C) на образующую (l):

$$S_{бок} = \frac{1}{2} Cl = \pi r l \ (r \text{ — радиус основания}).$$

Объем всякого конуса равен трети произведения площади основания (S) на высоту (h):

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

Для круглого конуса:

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

§ 9. Конические сечения

Коническими сечениями называются линии пересечения различных плоскостей с боковой поверхностью к р у г о в о г о (не обязательно круглого) конуса. Коническая поверхность мыслится неограниченно продолженной в обе стороны от вершины.

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость кругового конуса и не параллельна ни одной из его образующих (рис. 182), то коническое сечение является *эллипсом* (IV, B, 4). В исключительных случаях эллипс обращается в круг[1]).

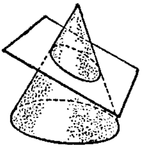


Рис. 182.

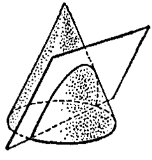


Рис. 183.

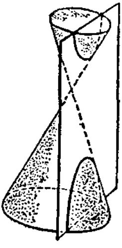


Рис. 184.

Если секущая плоскость пересекает лишь одну полость кругового конуса и параллельна одной из образующих (рис. 183), то в сечении получается неограниченная (в одну сторону) линия, называемая *параболой*.

---

[1]) Например, в круглом конусе все сечения, параллельные основанию, — круги.

Если секущая плоскость пересекает обе полости поверхности кругового конуса (рис. 184), то в сечении получается линия, состоящая из двух неограниченно удаляющихся ветвей, называемая *гиперболой*. В частности, гипербола получается в том случае, когда секущая плоскость параллельна оси конуса.

Конические сечения представляют большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении. Так, в технике применяются эллиптические зубчатые колеса, параболические прожекторы; планеты и некоторые кометы движутся по эллипсам; некоторые кометы движутся по параболам и гиперболам.

Основные свойства конических сечений излагаются во всех руководствах по аналитической геометрии.

§ 10. Шар

Шаровой, или *сферической, поверхностью* (иногда просто *сферой*) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — *центра шара* (точка O на рис. 185). *Радиус* OE *и диаметр* EG шаровой поверхности определяются так же, как для окружности (IV, Б, 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется шаром.

Шар можно получить, вращая полукруг (или круг) около его диаметра.

Все плоские сечения шара — круги ($ABCD$ на рис. 185). С приближением секущей плоскости к центру шара радиус

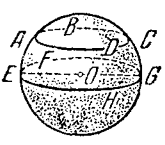


Рис. 185.

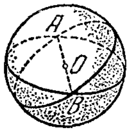


Рис. 186.

круга увеличивается. Наибольший круг $EFGH$ получается в сечении шара плоскостью, проходящей через центр O. Такой круг делит пополам шар и его поверхность и называется *большим кругом.* Радиус большого круга равен радиусу шара.

Всякая пара больших кругов пересекается по диаметру шара (AB на рис. 186), служащему диаметром также и для каждого из пересекающихся кругов.

Через две точки шаровой поверхности, лежащие на концах одного и того же диаметра (например, полюсы земного шара), можно провести бесчисленное множество больших кругов (меридианы). Через две точки, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести один и только один большой круг.

Кратчайшее расстояние на сферической поверхности между двумя ее точками есть дуга (меньшая полуокружности) большого круга, проведенная через эти точки.

Поверхность шара равна учетверенной площади большого круга:

$$S = 4\pi R^2$$

(R — радиус шара).

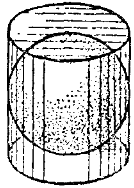


Рис. 187.

Объем шара равен объему пирамиды, основание которой имеет ту же площадь, что и поверхность шара, а высота есть радиус шара:

$$V = \frac{1}{3} RS = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Объем шара в полтора раза меньше объема описанного вокруг него цилиндра (рис. 187), а поверхность шара — в полтора раза меньше полной поверхности того же цилиндра (*теорема Архимеда*):

$$S = \frac{2}{3} S_1,$$

$$V = \frac{2}{3} V_1,$$

где S_1, V_1 — полная поверхность и объем цилиндра, изображенного на рис. 187.

§ 11. Сферические многоугольники

Сферическим многоугольником называется фигура, составленная замкнутым рядом дуг больших кругов; каждая дуга не должна превосходить полуокружности большого круга. На рис. 188 изображен сферический пятиугольник.

Дуги AB, BC и т. д. — *стороны* сферического многоугольника; точки A, B, C и т. д. — *вершины*.

Сферический многоугольник — выпуклый, если весь его контур располагается на *одной* из двух полусфер, образованных большим кругом, которому принадлежит какая-либо сторона. Многоугольник *ABCDE* рис. 188 — выпуклый. Многоугольник *LMNP* рис. 189 — невыпуклый; его контур располагается на обеих полусферах, образованных большим кругом стороны *NM* (а также стороны *NP*).

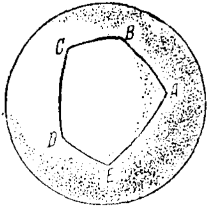


Рис. 188.

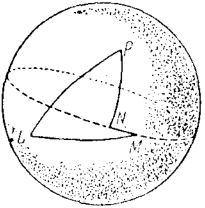


Рис. 189.

Замечание. В элементарной геометрии рассматриваются только *простые* сферические многоугольники, т. е. такие, у которых контур не пересекает сам себя. Всякий простой многоугольник разбивает полусферу на две области. Одну из них можно считать внутренней, другую — *внешней*. Если площади областей не равны, за внутреннюю обычно принимают ту область, площадь которой меньше.

Рис. 190.

Внутренний угол сферического многоугольника, например угол *ABC*, обозначенный на рис. 190 через β, измеряется линейным углом *A'BC'*, который образован лучами *BA'*, *BC'*, касающимися сторон *BA*, *BC*. Вместо линейного угла *A'BC'* можно взять измеряемый им двугранный угол, ребро которого есть радиус *OB*, а гранями являются плоскости *OBA'*, *OBC'* больших кругов *BA*, *BC*.

Таким же образом *внешний* угол сферического многоугольника, например угол *D''BA*, обозначенный на рис. 190 через β', измеряется линейным углом *D'BA'* или соответствующим двугранным углом. Сумма внутреннего и внешнего углов при одной вершине равна 180°, т. е. π радианов.

Плоский многоугольник имеет самое меньшее три стороны. Сферический многоугольник может иметь две. На рис. 191 изображен сферический двуугольник. Внутренние углы α, β двуугольника равны между собой.

Площадь двуугольника, внутренний угол которого содержит α радианов, выражается формулой

$$S = 2R^2\alpha,$$

где R — радиус шара.

Пример. Двуугольник, у которого внутренний угол прямой (четвертинка поверхности шара), имеет площадь $2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2$, т. е. ту же, что и большой круг (ср. IV, Б, 14).

В сферическом треугольнике сумма внутренних углов всегда больше 180°; площадь треугольника пропорцио-

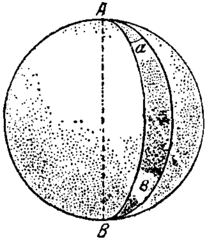


Рис. 191.

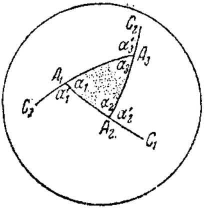


Рис. 192.

нальна избытку этой суммы над 180°. Именно, если внутренние углы содержат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ радианов (рис. 192), то

$$S = R^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi). \tag{1}$$

Сумма внешних углов сферического треугольника всегда меньше 360°. Если α_1', α_2', α_3' — внешние углы треугольника, выраженные в радианной мере, то

$$S = R^2[2\pi - (\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')]. \tag{2}$$

Эта формула распространяется и на любой сферический многоугольник. Именно,

$$S = R^2 [2\pi - (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n)],$$

т. е. отношение площади сферического многоугольника к квадрату радиуса шара равно избытку 2π над суммой внешних углов.

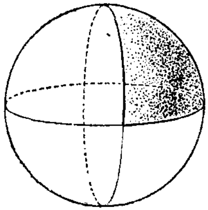


Рис. 193.

Пример. Рассмотрим сферический треугольник, образованный тремя взаимно перпендикулярными большими кругами (рис. 193). Сумма его внутренних углов равна $\frac{3\pi}{2}$. По формуле (1) находим:

$$S = \frac{1}{2} \pi R^2.$$

Тот же результат получим, учтя, что данный треугольник составляет $\frac{1}{8}$ часть сферы (ср. IV, B, 10).

Сумма внешних углов данного треугольника тоже равна $\frac{3\pi}{2}$. По формуле (2) находим снова $S = \frac{1}{2} \pi R^2$.

§ 12. Части шара

Часть шара, отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью ($ABCD$ на рис. 194), называется *шаровым* (или сферическим) *сегментом*.

Основанием шарового сегмента называется круг $ABCD$. *Высотой* шарового сегмента называется отрезок NM, т. е. длина перпендикуляра, восставленного из центра N основания до пересечения с поверхностью шара. Точка M называется *вершиной* шарового сегмента.

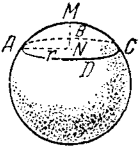


Рис. 194.

Кривая поверхность шарового сегмента равняется произведению его высоты на окружность большого круга шара:

$$S = 2\pi Rh$$

(где R — радиус шара, $h = MN$).

Объем шарового сегмента выражается так:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right), \text{ или } V = \frac{1}{6} \pi h (h^2 + 3r^2),$$

где r — радиус основания сегмента.

Часть шара, заключенная между двумя секущими параллельными плоскостями (ABC и DEF на рис. 195), называется *шаровым слоем*. Кривая поверхность шарового слоя называется *шаровым поясом* (или *зоной*). Круги ACB и DFE называются *основаниями* шарового пояса. Расстояние NO между основаниями есть *высота* шарового слоя (и пояса).

Кривая поверхность шарового слоя (S) равна произведению его высоты $h = NO$ на окружность большого круга шара:

$$S = 2\pi Rh.$$

Объем шарового слоя выражается формулой

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi (r_1^2 + r_2^2) h,$$

где r_1 и r_2 — радиусы оснований.

Часть шара, ограниченная кривой поверхностью шарового сегмента (AC на рис. 196) и конической поверхностью

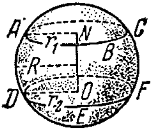


Рис. 195.

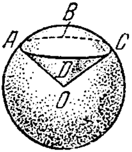


Рис. 196.

($OABCD$), основанием которой служит основание сегмента ($ABCD$), а вершиной — центр шара, называется *шаровым сектором*.

Поверхность шарового сектора складывается из кривых поверхностей шарового сегмента и конуса.

Объем шарового сектора равен объему пирамиды, основание которой имеет ту же площадь, что и вырезываемая сектором часть шаровой поверхности (S), а высота равна радиусу шара:

$$V = \frac{1}{3} RS = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

где h — высота шарового сегмента, принадлежащего шаровому сектору.

§ 13. Касательная плоскость шара, цилиндра и конуса

Небольшую дугу AB какой-нибудь *кривой линии* (например, окружности) на практике часто без заметной ошибки можно заменить небольшим отрезком AT прямой, касательной к дуге AB в точке A (рис. 197). Так, например, *мы говорим*, что идем из одного места в другое по прямой линии; *на самом деле мы* перемещаемся при этом не по прямой линии, а по дуге большого круга, проведенного на поверхности земного шара.

Рис. 197

Таким же образом небольшую часть *кривой поверхности* (например, поверхности шара) часто можно без заметной ошибки земенить небольшим куском *касательной плоскости*, т. е. плоскости, которая в малой своей части практически неотличима от малой же части кривой поверхности. Этот факт был причиной того, что в течение многих тысячелетий люди ошибочно считали поверхность Земли плоской.

Точное определение касательной плоскости можно дать в полном соответствии с прежде данным (IV, Б, 14) точным определением касательной прямой. Тогда мы рассматривали *две точки* A и B некоторой кривой (например, *окружности*); *одну из них приближали* к другой и отмечали, что при этом прямая AB приближалась к некоторому предельному положению. Теперь же возьмем на какой-либо поверхности (например, на поверхности шара) *три точки* A, B, C (рис. 198); через них проведем секущую плоскость P. Две точки B и C будем приближать к точке A по двум *различным* направлениям. При этом плоскость P будет приближаться к некоторому предельному положению Q независимо от того, где были взяты точки B и C и как они двигались, приближаясь к A. Плоскость Q называется касательной плоскостью (в точке A)[1].

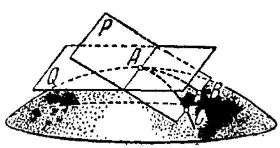


Рис. 198

[1] Требование, чтобы точки B и C приближались к точке A по различным направлениям, существенно. Если, например, два путешественника будут приближаться к Северному полюсу по одному и тому же *меридиану или по двум меридианам, составляющим продолжение один*

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке A называется плоскость, к которой неограниченно приближается секущая плоскость, проходящая через три точки поверхности A, B, C, когда точки B и C приближаются к точке A по различным направлениям. Может случиться, что поверхность в некоторой точке A вовсе не имеет касательной плоскости. Так, например, в вершине конуса коническая поверхность касательной плоскости не имеет.

Плоскость (Q, рис. 199), *касательная к шаровой поверхности*, перпендикулярна к радиусу OA, проведенному в точку касания. Плоскость, касательная к шаровой поверхности, имеет с ней только одну общую точку.

Последнее свойство принимается обычно за определение плоскости, касательной к шару. Однако оно совер-

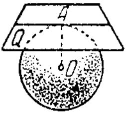


Рис. 199.

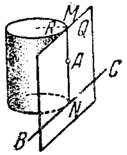


Рис. 200.

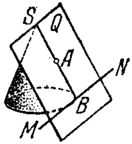


Рис. 201.

шенно недействительно для других поверхностей, в частности для поверхности цилиндра и конуса. Данное же выше определение применимо и к этим поверхностям.

Плоскость Q (рис. 200), *касательная к поверхности круглого цилиндра* в точке A, проходит через образующую MN, идущую через точку A, и через касательную BC к окружности основания в точке N, принадлежащей образующей MN. Плоскость, касательная к поверхности круглого цилиндра, отстоит от всех точек его оси на расстоянии, равном радиусу R основания цилиндра.

Плоскость Q (рис. 201), *касательная к поверхности круглого конуса* в точке A (не совпадающей с вершиной S), проходит через образующую SB, идущую через точку A, и через касательную MN к окружности основания в точке B.

другого, то плоскость, проходящая через полюс A и пункты B и C, в которых находятся путешественники, все время будет совпадать с плоскостью меридиана и не будет, следовательно, приближаться к касательной плоскости, т. е. все время будет одной и той же секущей плоскостью. Упомянутое требование можно строго формулировать так: касательные к дугам AC и AB в точке их пересечения A должны быть различными прямыми.

Цилиндр называется *вписанным в призму,* если боковые грани призмы являются плоскостями, касательными к цилиндру, а плоскости оснований у призмы и цилиндра одни и те же. *Цилиндр* называется *описанным около призмы,* если боковые ребра призмы являются образующими боковой поверхности цилиндра, а плоскости оснований у призмы и цилиндра одни и те же.

Совершенно так же определяется *конус, вписанный в пирамиду* или *описанный около нее.*

§ 14. Телесные углы

Телесным углом называют часть пространства, заключенную внутри одной полости конической поверхности (IV, В, 8) с замкнутой направляющей. Так же как и угол между двумя прямыми на плоскости, телесный угол простирается неограниченно (бесконечная воронка). Многогранный угол (IV, В, 5) есть частный случай телесного угла (пирамидальная поверхность — частный случай конической).

Так же как величина угла между двумя прямыми измеряется дугой окружности, телесный угол измеряется куском поверхности шара. Именно, из вершины S телесного угла проводим любым радиусом шаровую поверхность. На этой поверхности поверхность телесного угла вырежет некоторую часть ($ABCD$, рис. 202). Площадь этой части будет меняться в зависимости от величины радиуса шара, но всегда будет составлять одну и ту же долю площади всей поверхности шара. Поэтому мерой телесного угла могло бы служить отношение площади $ABCD$ к площади шаровой поверхности, подобно тому как угол между двумя прямыми можно было бы измерять отношением заключенной между ними дуги (с центром в вершине угла) к длине окружности того же радиуса (угол в «полоборота», в «четверть оборота» и т. д.). Принято, однако, за меру телесного угла брать отношение площади $ABCD$ к площади квадрата, построенного на радиусе шара (эта последняя выражается величиной R^2, пропорциональной площади $4\pi R^2$ поверхности шара). Такое измерение телесных углов подобно радианному измерению углов между прямыми (см. V, 3).

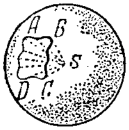


Рис. 202.

Итак, *за меру α телесного угла с вершиной S принимают отношение площади, вырезываемой телесным* *углом на поверхности шара, описанного произвольным радиусом из центра S; к квадрату радиуса этого шара*

$$\alpha = \frac{\text{пл. } ABCD}{R^2}.$$

Пример 1. Телесный угол, образуемый тремя взаимно перпендикулярными плоскостями (например, двумя стенками и дном прямоугольной коробки), равен $\frac{\pi}{2}$. Действительно, если из вершины S такого телесного угла описать шаровую поверхность, то на поверхности шара вырежется $^1/_8$ ее часть (рис. 203), так как три взаимно перпендикулярные плоскости разрежут ее на 8 равных частей (представьте себе на поверхности глобуса кусок, вырезанный двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через меридианы, и плоскостью, проходящей через экватор); следовательно, площадь этой части поверхности равна $4\pi R^2 : 8 = \frac{\pi R^2}{2}$, и ее отношение к R^2 равно $\frac{\pi}{2}$.

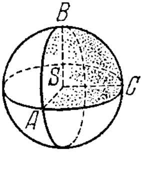


Рис. 203.

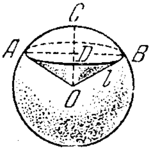


Рис. 204.

Пример 2. Найти телесный угол при вершине конуса, у которого высота равна радиусу основания. Опишем из вершины конуса шар радиусом, равным образующей конуса l (рис. 204). Высоту OD конуса можно выразить через l; $OD = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; высота CD сферического сегмента ABC равна $l - \frac{l\sqrt{2}}{2}$; сферическая площадь, вырезываемая телесным углом, есть кривая поверхность этого сферического сегмента, она равна (IV, B, 12)

$$2\pi l \cdot CD = 2\pi l^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Следовательно, величина телесного угла есть

$$2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Единицей меры телесного угла является телесный угол, вырезывающий из сферы (с центром в вершине угла) площадь, равную площади квадрата, построенного на радиусе. Такой телесный угол называется *стереорадианом*.

§ 15. Правильные многогранники

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одно и то же число граней.

В противоположность тому, что существует бесчисленное множество не подобных друг другу правильных многоугольников, существует лишь ограниченное число не подобных друг другу правильных многогранников. *Выпуклых правильных многогранников* может быть только *пять* (сверх того, существует еще четыре *невыпуклых*). Эти пять правильных выпуклых многогранников следующие: *правильный тетрáэдр* (четырехгранник) или, короче,

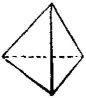


Рис. 205.

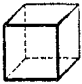


Рис. 206.

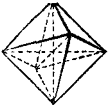


Рис. 207.

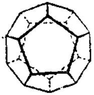


Рис. 208.

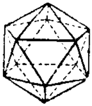


Рис. 209.

просто *тетрáэдр* (рис. 205); *гексáэдр* (шестигранник), который есть не что иное, как куб (рис. 206); *октáэдр* (восьмигранник, рис. 207); *додекáэдр* (12-гранник, рис. 208); *икосáэдр* (20-гранник, рис. 209).

Числа вершин и ребер, а также поверхности и объемы, выраженные через ребра a, правильных выпуклых многогранников даны в следующей таблице:

	Число сторон у каждой грани	Число ребер у каждой вершины	Число граней	Число вершин	Число ребер	Поверхность	Объем
1. Тетраэдр	3	3	4	4	6	$1{,}73\,a^2$	$0{,}12a^3$
2. Гексаэдр (куб)	4	3	6	8	12	$6{,}00\,a^2$	a^3
3. Октаэдр	3	4	8	6	12	$3{,}46\,a^2$	$0{,}47a^3$
4. Додекаэдр	5	3	12	20	30	$20{,}64\,a^2$	$7{,}66a^3$
5. Икосаэдр	3	5	20	12	30	$8{,}66\,a^2$	$2{,}18a^3$

В каждый правильный многогранник можно вписать шар. Около каждого правильного многогранника можно описать шар.

§ 16. Симметрия

Греческое слово *симметрия* буквально означает «соразмерность». Под симметрией в широком смысле понимают всякую правильность во внутреннем строении тела или фигуры. Учение о различных видах симметрии представляет большую и важную ветвь геометрии, тесно связанную со многими отраслями естествознания и техники, начиная от текстильного производства (разрисовка тканей) и кончая тонкими вопросами строения вещества.

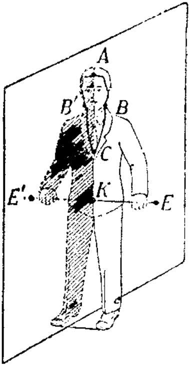


Рис. 210.

Простейшими видами симметрии являются следующие три:

1. *Зеркальная симметрия*, хорошо знакомая каждому из повседневного наблюдения. Как показывает само название, зеркальная симметрия связывает некоторый предмет и его изображение в плоском зеркале. Геометрическое определение зеркальной симметрии таково: *фигура* (рис. 210) называется *симметричной относительно плоскости* P (зеркальная плоскость, плоскость симметрии), если каждой точке E этой фигуры соответствует такая принадлежащая той же фигуре точка E', что отрезок EE' перпендикулярен к плоскости P и делится этой плоскостью пополам.

Говорят, что одна фигура (или тело) зеркально симметрична другой, если вместе они образуют зеркально симметричную фигуру (или тело). На рис. 210 линия ABC симметрична линии $AB'C$; правая рука симметрична левой.

Важно отметить, что два симметричных друг другу тела, вообще говоря, не могут быть «вложены друг в друга»; иначе, одно из этих тел не может занять места другого. Так, перчатка с левой руки не годится для правой руки.

Симметричные фигуры при всем их сходстве существенно отличаются друг от друга. Чтобы убедиться в этом, попробуйте, поставив бумагу против зеркала, прочесть в зеркале несколько напечатанных на бумаге слов.

Симметричные предметы нельзя поэтому назвать равными в узком смысле слова. Их называют *зеркально* *равными.* Вообще зеркально равными телами (или фигурами) называются тела (или фигуры) в том случае, если при надлежащем их смещении они могут образовать две половины зеркально симметричного тела (или фигуры).

2. *Центральная симметрия. Фигура* (или тело) называется *симметричной относительно центра С,* если каждой точке E этой фигуры (тела) соответствует такая принадлежащая той же фигуре (телу) точка A, что отрезок EA проходит через точку C и делится в ней пополам (рис. 211). Фигура $ABCDE$, составленная из двух треугольников ABC и EDC (рис. 211), у которых стороны попарно равны и служат продолжением друг друга, обладает центром симметрии (C). Между соответствующими друг другу парами точек всегда лежат равные отрезки; соответствующие друг другу углы двух половин тела, обладающего центральной симметрией, также равны. Однако, вообще говоря, две половины тела с центральной симметрией не могут занять место одна другой, как и две половины тела, обладающего зеркальной симметрией. Более того, одну из половин тела с центральной симметрией можно (поворотом на 180° около любой оси, проходящей через центр симметрии) поставить в зеркально симметричное положение с другой (относительно плоскости, перпендикулярной к оси поворота). Поэтому две половины тела с центральной симметрией зеркально равны (см. выше) друг другу.

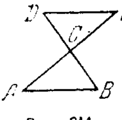


Рис. 211

Пример. Если продолжить ребра SA, SB, SC, ... пирамиды $SABCDE$ (рис. 212) на расстояния, равные длинам этих ребер, в противоположную сторону от вершины, то две пирамиды $SABCDE$ и $Sabcde$ вместе образуют тело, симметричное относительно центра S.

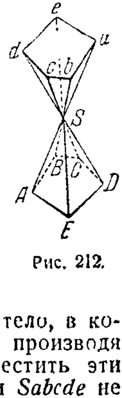


Рис. 212.

Если пирамида $SABCDE$ на рис. 212 полая и не имеет «дна» $ABCDE$ (пирамидальная воронка), то, вывернув ее наизнанку, получим тело, в которое можно вложить пирамиду $Sabcde$; не производя выворачивания, нельзя (в общем случае) совместить эти два тела, так что в общем случае $SABCDE$ и $Sabcde$ не равны, а лишь зеркально равны. В исключительных случаях (например, если пирамида $SABCDE$ — правильная) возможно и равенство.

3. *Симметрия вращения. Тело (или фигура) обладает симметрией вращения*, если при повороте на угол $\frac{360^\circ}{n}$ (n — целое число) около некоторой прямой AB (ось симметрии) оно полностью совмещается со своим исходным положением. Если число n равно 2, 3, 4 и т. д., то ось симметрии называется *осью второго, третьего и т. д. порядка.*

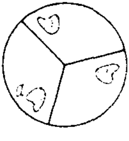


Рис. 213.

Пример. Разрежем круг на три сектора с центральными углами по 120° (рис. 213). Наложим эти секторы друг на друга (не переворачивая их другой стороной) и прорежем на них фигуру a произвольной формы. Сложив снова секторы так, как они лежали, получим фигуру (круг с тремя вырезанными на нем дырочками), обладающую осью симметрии 3-го порядка. Эта ось перпендикулярна к плоскости чертежа. Поворотом на 120° фигура полностью совмещается со своим исходным положением.

В более узком смысле осью симметрии называют ось симметрии 2-го порядка и говорят об «осевой симметрии», которую можно определить так: *фигура (или тело) обладает осевой симметрией* относительно некоторой оси, если каждой ее точке E соответствует такая принадлежащая той же фигуре точка F, что отрезок EF перпендикулярен к оси, пересекает ее и в точке пересечения делится пополам. Рассмотренная выше (рис. 211 на стр. 330) пара треугольников обладает (кроме центральной) еще осевой симметрией. Ее ось симметрии проходит через точку C перпендикулярно к плоскости чертежа.

Примеры перечисленных видов симметрии.

Шар обладает и центральной, и зеркальной, и осевой симметрией. Центром симметрии является центр шара, плоскостью симметрии — плоскость любого большого круга; осью — любой диаметр шара. Порядок оси — любое целое число.

Круглый конус имеет осевую симметрию (любого порядка); ось симметрии — ось конуса.

Правильная пятиугольная призма имеет плоскость симметрии, идущую параллельно основаниям на равном от них расстоянии, и ось симметрии пятого порядка, совпадающую с осью призмы. Плоскостью симметрии может также служить плоскость, делящая пополам один из двугранных углов, образуемых боковыми гранями.

§ 17. Симметрия плоских фигур

1. *Зеркально-осевая симметрия.* Если плоская фигура ($ABCDE$ на рис. 214) симметрична относительно плоскости P (что возможно лишь в случае взаимной перпендикулярности плоскостей $ABCDE$ и P), то прямая KL, по которой пересекаются упомянутые плоскости, служит осью симметрии (2-го порядка) фигуры $ABCDE$. Обратно, если плоская фигура $ABCDE$ имеет ось симметрии KL, лежащую в ее плоскости, то эта фигура симметрична относительно плоскости P, проведенной через KL перпендикулярно к плоскости фигуры. Поэтому ось KL можно назвать также *зеркальной прямой* плоской фигуры $ABCDE$.

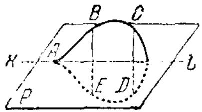


Рис. 214.

Две зеркально симметричные плоские фигуры всегда можно наложить друг на друга. Однако для этого необходимо вывести одну из них (или обе) из их общей плоскости.

2. *Центральная симметрия.* Если плоская фигура ($ABCDE$ на рис. 215) имеет ось симметрии 2-го порядка, перпендикулярную к плоскости фигуры (прямая KL на рис. 215), то точка O, в которой KL пересекает плоскость фигуры, служит центром симметрии фигуры $ABCD$. Обратно, если плоская фигура $ABCD$ имеет центр симметрии O (он непременно лежит в плоскости фигуры), то эта фигура имеет ось симметрии второго порядка, проходящую через O перпендикулярно к плоскости фигуры. Таким образом, две центрально симметричные плоские фигуры всегда можно наложить друг на друга, не выводя их из общей плоскости. Для этого достаточно одну из них повернуть на угол 180° около центра симметрии.

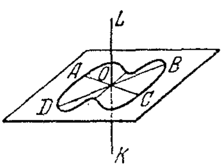


Рис. 215.

Как в случае зеркальной, так и в случае центральной симметрии плоская фигура непременно имеет ось симметрии 2-го порядка, но в первом случае эта ось лежит в плоскости фигуры, а во втором — перпендикулярна к этой плоскости.

Поэтому в планиметрии лишь в первом случае симметрия называется осевой.

§ 18. Подобие тел

Подобие пространственных тел и фигур можно определить так же, как подобие плоских фигур (IV, Б, 13). Два тела *подобны*, если одно из них получается из другого увеличением или уменьшением всех его размеров (линейных) в одном и том же отношении. Машина и ее модель — подобные тела. Два тела (или фигуры) *зеркально подобны*, если одно из них подобно зеркальному изображению другого (см. IV, В, 16). Так, например, негатив фотоснимка с портрета зеркально подобен портрету. Два ботинка различных номеров, но одного фасона, один — с правой, другой — с левой ноги, зеркально подобны.

В подобных и зеркально подобных фигурах все соответственные углы (линейные и двугранные) равны. В подобных телах многогранные и телесные углы равны, в зеркально подобных — зеркально равны.

Если два четырехгранника (т. е. две треугольные пирамиды) *имеют соответственно пропорциональные ребра* (или, что то же, соответственно подобные грани), *то они подобны или зеркально подобны*, так что, например, если ребра первого вдвое больше ребер второго, то и высоты первого вдвое больше высот второго и радиус описанного шара первого вдвое больше радиуса второго и т. д.

Для многогранников с бо́льшим числом граней эта теорема уже не имеет места. Представим себе, например, что 12 равных стержней соединены так, что они образуют ребра куба. Если соединения этих стержней у вершин сделаны на шарнирах, то, не растягивая стержней, можно изменить форму образованной ими фигуры и из куба получить параллелепипед P. Параллелепипед P_1, подобный P, не будет ни подобен, ни зеркально подобен кубу, хотя ребра его пропорциональны ребрам куба; с четырехгранником, построенным из 6 стержней, этого случиться не может, так как он сохранит свою форму и в том случае, если все соединения будут шарнирными.

Итак, вообще говоря, пропорциональности всех ребер недостаточно для того, чтобы тела были подобны (или зеркально подобны).

Две призмы или две пирамиды подобны или зеркально подобны, если основание и одна из боковых граней первой соответственно подобны основанию и боковой грани второй и если, сверх того, двугранные углы, образованные в обеих призмах (пирамидах) упомянутыми гранями, равны между собой. Две правильные призмы или пирамиды с одним и тем же числом граней подобны, если радиусы их оснований пропорциональны высотам. Два круглых цилиндра или конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны высотам.

В подобных телах площади всех соответствующих друг другу плоских и кривых поверхностей пропорциональны квадратам любых соответственных отрезков (т. е. отношение площадей равно квадрату отношения подобия).

Объемы подобных тел, а также объемы любых соответственных их частей пропорциональны кубам любых соответственных отрезков (т. е. отношение объемов равно кубу отношения подобия).

Пользуясь последними двумя свойствами, можно в ряде случаев очень упростить некоторые вычисления.

Пример 1. На покраску полушарового купола диаметром 5 *м* идет 6,5 *кг* олифы. Сколько олифы нужно для окраски купола диаметром 8 *м*?

Всякие два полушария являются подобными телами. Их поверхности, а следовательно, и количества олифы, необходимые для их покраски, пропорциональны квадратам диаметров. Обозначая через x искомое количество олифы, имеем:

$$\frac{x}{6{,}5}=\left(\frac{8}{5}\right)^2; \quad x=6{,}5\left(\frac{8}{5}\right)^2\approx 16{,}6 \text{ кг}.$$

Пример 2. Консервная банка высотой в 11 *см* и поперечником в 8 *см* вмещает 0,5 *кг* консервов. Каковы размеры банки тех же консервов (форма банки — та же), вмещающей 1 *кг* консервов?

Обозначая через h высоту и через d поперечник (диаметр основания) этой банки, имеем $\left(\frac{h}{11}\right)^3=\frac{1}{0{,}5}=2$, откуда

$$h=11\sqrt[3]{2}\approx 14 \text{ см}.$$

Точно так же $d=8\sqrt[3]{2}\approx 10$ *см*.

§ 19. Объемы и поверхности тел

Обозначения: V — объем; S — площадь основания; $S_{бок}$ — боковая поверхность; P — полная поверхность; h — высота; a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда; A — апофема правильной пирамиды и правильной усеченной пирамиды; l — образующая конуса; p — периметр или окружность основания; r — радиус основания; d — диаметр основания; R — радиус шара; D — диаметр шара.

Призма, прямая и наклонная; *параллелепипед*:

$$V = Sh.$$

Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = ph.$$

Параллелепипед прямоугольный:

$$V = abc; \quad P = 2\,(ab + bc + ac).$$

Куб:

$$V = a^3, \quad P = 6a^2.$$

Пирамида, правильная и неправильная:

$$V = \frac{1}{3}\,Sh.$$

Пирамида правильная:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\,pA.$$

Усеченная пирамида, правильная и неправильная:

$$V = \frac{1}{3}\,(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)\,h.$$

Усеченная пирамида правильная:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\,(p_1 + p_2)\,A.$$

Цилиндр круговой (прямой и наклонный):

$$V = Sh = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\,\pi d^2 h.$$

Цилиндр круглый:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh = \pi dh.$$

Конус круговой (круглый и наклонный):

$$V = \frac{1}{3}\,Sh = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h = \frac{1}{12}\,\pi d^2 h.$$

Конус круглый:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\,pl = \pi rl = \frac{1}{2}\,\pi dl.$$

Усеченный конус круговой (круглый и наклонный):

$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{1}{12}\pi h\,(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2).$$

Усеченный конус круглый:

$$S_{\text{бок}} = \pi\,(r_1 + r_2)\,l = \frac{1}{2}\pi\,(d_1 + d_2)\,l.$$

Шар:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3;\quad P = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

Полушарие:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{1}{12}\pi D^3,\quad S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2,$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R^2 = \frac{1}{2}\pi D^2,\quad P = 3\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi D^2.$$

Шаровой сегмент:

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right) = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2),$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi\,(r^2 + h^2),\quad P = \pi\,(2r^2 + h^2).$$

Шаровой слой:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\,(r_1^2 + r_2^2)\,h,\quad S_{\text{бок}} = 2\pi Rh.$$

Шаровой сектор:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h'$$

(h' — высота сегмента, содержащегося в секторе).

Полый шар:

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(R_1^3 - R_2^3) = \frac{\pi}{6}(D_1^3 - D_2^3);$$

$$P = 4\pi\,(R_1^2 + R_2^2) = \pi\,(D_1^2 + D_2^2)$$

(R_1 и R_2 — радиусы внешней и внутренней шаровых поверхностей).

V. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§ 1. Предмет тригонометрии

Слово «тригонометрия» искусственно составлено из греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрезис» — измерение (соответствующим русским термином было бы «треугольникомерие»). Основная задача тригонометрии состоит в *решении треугольников*, т. е. в вычислении неизвестных величин треугольника по данным значениям других его величин. Так, в тригонометрии решают задачу о вычислении углов треугольника по данным его сторонам, задачу о вычислении сторон треугольника — по площади и двум углам и т. д. Так как любую вычислительную задачу геометрии можно свести к решению треугольников, то тригонометрия охватывает своими применениями всю планиметрию и стереометрию и широко применяется во всех отделах естествознания и техники.

Учение о решении сферических треугольников (IV, В, 11) называется *сферической тригонометрией*; в противоположность этому учение о решении обычных треугольников называют *плоской или прямолинейной тригонометрией*.

Углы произвольного треугольника нельзя связать непосредственно с его сторонами с помощью алгебраических соотношений. Поэтому тригонометрия вводит в рассмотрение, кроме самих углов, еще новые количества, так называемые тригонометрические величины (их перечень и определения см. V, 5). Эти величины уже можно связать со сторонами треугольника простыми алгебраическими соотношениями. С другой стороны, по данному углу можно вычислить соответствующее значение тригонометрической величины, и обратно. Правда, эти вычисления требуют длительных и утомительных расчетов, но эта работа проделана раз навсегда и закреплена в таблицах.

Значение каждой тригонометрической величины изменяется с изменением угла, которому она соответствует; другими словами, тригонометрическая величина есть функция угла (VI, 2). Отсюда наименование: *тригонометрические функции*.

Между различными тригонометрическими функциями существуют важные зависимости. Использование их позволяет сокращать и облегчать вычисления. Часть тригонометрии, посвященная изучению этих соотношений, называется *гониометрией*, т. е. «угломерием»: («гони́а» — по-гречески «угол»).

§ 2. Исторические сведения о развитии тригонометрии

Потребность в решении треугольников раньше всего возникла в астрономии, и в течение долгого времени тригонометрия развивалась и изучалась как один из отделов астрономии.

Насколько известно, способы решения треугольников (сферических) впервые были письменно изложены греческим астрономом Гиппархом в середине 2 века до н. э. [1]). Наивысшими достижениями греческая тригонометрия обязана астроному Птолемею (2 век н. э.), создателю геоцентрической системы мира, господствовавшей до Коперника.

Греческие астрономы не знали синусов, косинусов и тангенсов. Вместо таблиц этих величин они употребляли таблицы, позволявшие отыскивать хорду окружности по стягиваемой дуге. Дуги измерялись в градусах и минутах; хорды тоже измерялись градусами (один градус составлял шестидесятую часть радиуса), минутами и секундами. Это шестидесятеричное подразделение греки заимствовали у вавилонян (см. II, 7).

Таблицы, составленные Птолемеем, содержали хорды всех дуг через каждые $\frac{1^\circ}{2}$ [2]), вычисленные с точностью до секунды. С помощью интерполяции по ним можно было найти с той же точностью хорду любой дуги. (Для облегчения интерполяции Птолемей дает поправки на 1'.) При вычислении таблиц Птолемей опирался на открытую им теорему о диагоналях вписанного четырехугольника (IV, Б, 19).

---

1) Сочинение Гиппарха не дошло до нас.

2) Если взять центральный угол, опирающийся на половину рассматриваемой дуги, то хорда будет удвоенной линией синуса этого угла. Поэтому таблица Птолемея равносильна пятизначной таблице значений синуса через $\frac{1^\circ}{4}$.

Значительной высоты достигла тригонометрия и у индийских средневековых астрономов. Как и греки, индийцы заимствовали вавилонское градусное измерение дуг. Но индийцы рассматривали не хорды дуг, а линии синусов и косинусов (т. е. линии PM и OP для дуги AM на рис. 216). Кроме того, рассматривалась линия PA, получившая позднее в Европе название «синус-верзус».

За единицу измерения отрезков MP, OP, PA принималась дуговая минута. Так, линия синуса дуги $AB = 90°$ есть OB — радиус окружности; дуга AL, равная радиусу, содержит (округленно) $57°18' = 3438'$. Поэтому синус дуги $90°$ считался равным $3438'$.

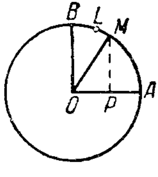


Рис. 216.

Дошедшие до нас индийские таблицы синусов (древнейшая составлена в 4 — 5 веке н. э.) не столь точны, как птолемеевы; они составлены через $3°45'$ (т. е. через $^1/_{24}$ часть дуги квадранта).

Дальнейшее развитие тригонометрия получила в 9 — 14 веках в трудах арабоязычных авторов. В 10 веке багдадский ученый Мухаммед из Буджана, известный под именем Абу-ль-Вафа, присоединил к линиям синусов и косинусов линии тангенсов, котангенсов, секансов и косекансов. Он дает им те же определения, которые помещаются в наших учебниках. Абу-ль-Вафа устанавливает также основные соотношения между этими линиями (соответствующие формулам V, 14). В руках знаменитого мусульманского ученого Насир эд-Дина из Туса (1201 — 1274) тригонометрия становится самостоятельной научной дисциплиной. Насир эд-Дин систематически рассматривал все случаи решения плоских и сферических треугольников и указал ряд новых способов решения.

В 12 веке был переведен с арабского языка на латинский ряд астрономических работ, и по ним впервые европейцы познакомились с тригонометрией [1]). Однако со

[1]) В это время появился латинский термин «синус», что означает «пазуха» или «карман». Это — перевод арабского слова «джейб», имеющего то же значение. Как появился этот арабский термин, неизвестно. Некоторые полагают, что он произошел из индийского (санскритского) слова «жиа» или «жива» (первое значение — тетива; в геометрии — хорда). Но синус в индийской терминологии именуется «ардха-жиа», т. е. полухорда.

Название «косинус» появилось только в начале 17 века как сокращение наименования complementi sinus (синус дополнения), указывающего, что косинус угла A есть синус угла, дополняющего угол A до $90°$. Наименования «тангенс» и «секанс» (в переводе с латинского означающие «касательная» и «секущая») введены в 1583 г. немецким ученым Финком.

многими достижениями арабоязычной науки европейцам не удалось познакомиться своевременно. В частности, им осталась неизвестной работа Насир эд-Дина. Выдающийся немецкий астроном 15 века Региомонтан (1436 — 1476) через 200 лет после Насир эд-Дина заново открыл его теоремы.

Региомонтан составил обширные таблицы синусов (через 1 минуту с точностью до седьмой значащей цифры). Он впервые отступил от шестидесятеричного деления радиуса и за единицу измерения линии синуса принял одну десятимиллионную часть радиуса. Таким образом, синусы выражались целыми числами (а не 60-ричными дробями). До введения десятичных дробей оставался только один шаг. Но он потребовал более 100 лет (см. II, 31).

За таблицами Региомонтана последовал ряд других, еще более подробных. Друг Коперника Ретикус (1514 — 1576) вместе с несколькими помощниками в течение 30 лет работал над таблицами, законченными и изданными в 1596 г. его учеником Ото. Углы шли через 10″, а радиус делился на 1 000 000 000 000 000 частей, так что синусы имели 15 верных цифр!

Буквенные обозначения (в алгебре они появились в конце 16 века) утвердились в тригонометрии лишь в середине 18 века благодаря русскому академику Эйлеру (1707 — 1783). Этот великий математик придал всей тригонометрии ее современный вид. Величины $\sin x$, $\cos x$ и т. д. он рассматривал как функции (VI, 2) числа x — радианной меры соответствующего угла. Эйлер давал числу x всевозможные значения: положительные, отрицательные и даже комплексные. Он ввел и обратные тригонометрические функции (V, 24).

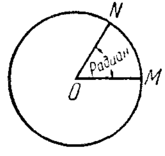


Рис. 217.

§ 3. Радианное измерение углов

Наряду с градусной мерой углов (IV, Б, 5) в тригонометрии употребляется и другая мера, называемая *радианной*. В ней за единицу измерения принимается *острый угол* (MON на рис. 217), *под которым видна из центра окружности* ее дуга MN, равная радиусу ($\breve{MN} = OM$). Такой угол называется *радианом*. Величина этого угла не зависит от радиуса окружности и от положения дуги MN на окружности. Так как полуокружность видна из центра под углом 180°, а длина ее равна π радиусам, то радиан в π раз меньше, чем угол в 180°, т. е. один радиан равен $\frac{180}{\pi}$ градусов:

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ{,}2958 \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Обратно, один градус равен $\frac{\pi}{180}$ радиана.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}.$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000291 \text{ радиана}.$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000005 \text{ радиана}.$$

Радианной мерой любого угла (AOB на рис. 218) *является отношение этого угла к радиану* (MON *на рис.* 218); но отношение $\angle AOB : \angle MON$ равно отношению дуг $\smile AB : \smile MN$, т. е. отношению дуги AB к радиусу.

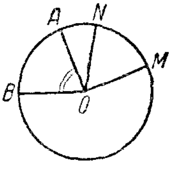


Рис. 218.

Таким образом, *радианная мера любого угла AOB есть отношение длины дуги AB, описанной произвольным радиусом из центра O и заключенной между сторонами угла, к радиусу OA этой дуги.*

Введение радианной меры угла позволяет придать многим формулам более простой вид[1]).

---

[1]) Во многих учебниках тригонометрии усиленно подчеркивается, что при радианном измерении углов величина угла измеряется о т в л е ч е н н ы м ч и с л о м. Создающееся при этом противопоставление радианного и градусного измерений лишено всякого основания. И в радианной и в градусной системе угол измеряется *единицей угла*. То, что наименование в одном случае (для градуса) проставляется, а в другом (для радиана) *подразумевается, не играет ровно никакой роли.*

Единственный разумный смысл вышеупомянутого утверждения заключается в том, что радианная мера угла, выражаясь *отношением* двух длин, совершенно не зависит от выбора единицы длины. Но и градусная мера угла не зависит от этого выбора; более того, она тоже есть отношение двух длин, именно, длины дуги, описанной из вершины угла и заключенной между его сторонами, к $\frac{1}{360}$ части дуги окружности того же радиуса. Это отношение ничем не хуже отношения той же дуги к ее радиусу.

Полезно запомнить следующую сравнительную таблицу градусной и радианной меры некоторых часто встречающихся углов:

Углы в градусах	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Углы в радианах	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

§ 4. Перевод градусной меры в радианную и обратно

1. *Чтобы найти радианную меру какого-нибудь угла по данной градусной его мере, нужно* (см. V, 3) *помножить число градусов на* $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453$, *число минут на* $\frac{\pi}{180 \cdot 60} \approx 0{,}000291$, *а число секунд на* $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0{,}000005$ *и найденные произведения сложить.*

Пример 1. Найти радианную меру угла 12°30′ с точностью до четвертого десятичного знака.

Решение. Помножаем 12 на $\frac{\pi}{180}$, учитывая и пятый десятичный знак множителя (так как при умножении на 12 абсолютная погрешность возрастает примерно в 10 раз, ср. II, 40); $12 \cdot 0{,}01745 = 0{,}2094$.

Помножаем 30 на $\frac{\pi}{180 \cdot 60}$, учитывая и шестой знак множителя; $30 \cdot 0{,}000291 \approx 0{,}0087$. Находим $12°30' = 0{,}2094 + 0{,}0087 = 0{,}2181$.

Для облегчения вычислений служит таблица II, 8, помещенная на стр. 48 и дающая точность до четвертого десятичного знака. В первом ее столбце («градусы») против цифры 12 находим 0,2094; в предпоследнем столбце («минуты») против цифры 30 находим 0,0087.

Запись:

$$\begin{aligned} 12° &= 0{,}2094 \text{ (радиана)} \\ 30' &= \underline{0{,}0087} \\ & \quad\; 0{,}2181 \end{aligned}$$

Пример 2. Найти радианную меру угла 217°40'
С помощью той же таблицы находим:

$$\begin{aligned} 200^\circ &= 3{,}4907 \\ 17^\circ &= 0{,}2967 \\ 40' &= \underline{0{,}0116} \\ & \quad 3{,}7990 \end{aligned}$$

2. *Чтобы найти градусную меру угла по данной его радианной мере, нужно* (см. V, 3) *помножить число радианов на* $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ{,}296$, т. е. на $57^\circ 17' 45''$ (если требуется точность до $0{,}5'$ и угол содержит не более 2 радианов, то множитель можно округлить до $57^\circ{,}30$, так как погрешность в 0,004 градуса составляет около четверти минуты).

Пример 3. Найти с точностью до $1'$ градусную меру угла, содержащего 1,360 радиана.

Решение. $1{,}360 \cdot 57^\circ{,}30 = 77^\circ{,}93 = 77^\circ 56'$.

Для облегчения вычислений служит таблица I, 9, помещенная на стр. 49. По ней находим:

$$\begin{aligned} &1 \quad \text{радиан} &&= 57^\circ 18' \\ &0{,}3 \quad \text{радиана} &&= 17^\circ 11' \\ &0{,}060 \quad \text{»} &&= \underline{\ \ 3^\circ 26'} \\ & && \quad 77^\circ 55'\ ^{1)} \end{aligned}$$

Пример 4. Найти градусную меру угла, содержащего 6,485 радиана. С помощью таблицы находим:

$$\begin{aligned} &6 \quad \text{радианов} &&= 343^\circ 46' \\ &0{,}4 \quad \text{радиана} &&= \ \ 22^\circ 55' \\ &0{,}08 \quad \text{»} &&= \ \ \ \ 4^\circ 35' \\ &0{,}005 \quad \text{»} &&= \underline{\ \ \ \ 0^\circ 17'} \\ & && \quad 371^\circ 33' \end{aligned}$$

(предельная погрешность 2′)

§ 5. Тригонометрические функции острого угла

Решение всяких треугольников в конечном счете сводится к решению прямоугольных треугольников. В прямоугольном же треугольнике *ABC* отношение двух его

---

1) Расхождение в 1′ проистекает от накопления погрешностей слагаемых; см. II, 38.

сторон, например катета a к гипотенузе c, всецело зависит от величины одного из острых углов, например A (рис. 219). Отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника и называются *тригонометрическими функциями* его острого угла. По отношению к углу A эти функции получают следующие названия и обозначения:

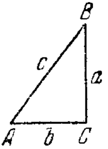


Рис. 219.

1) *Синус*: $\sin A = \frac{a}{c}$ (отношение *противолежащего катета к гипотенузе*).

2) *Косинус*: $\cos A = \frac{b}{c}$ (отношение *прилежащего катета к гипотенузе*).

3) *Тангенс*: $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ (отношение *противолежащего катета к прилежащему*).

4) *Котангенс*: $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$ (отношение *прилежащего катета к противолежащему*).

5) *Секанс*: $\operatorname{sc} A = \frac{c}{b}$ (отношение *гипотенузы к прилежащему катету*).

6) *Косеканс*: $\operatorname{csc} A = \frac{c}{a}$ (отношение *гипотенузы к противолежащему катету*).

По отношению к углу B («дополнительному» углу по отношению к A) названия соответственно меняются:

$$\sin B = \frac{b}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{sc} B = \frac{c}{a}; \quad \operatorname{csc} B = \frac{c}{b};$$

Для некоторых углов можно написать точные выражения их тригонометрических величин. Важнейшие случаи даны в таблице на стр. 345 [1]).

---

[1]) Углы 0° и 90°, строго говоря, не могут входить в прямоугольный треугольник в качестве его острых углов. Однако при расширении понятия тригонометрической функции (см. ниже) рассматриваются значения тригонометрических функций и для этих углов. С другой стороны, один из острых углов треугольника может сколь угодно приблизиться к 90°, другой будет тогда приближаться к нулю; тогда соответствующие тригонометрические величины будут приближаться к значениям, указанным в таблице.

Знак ∞, встречающийся в этой таблице, указывает на то, что абсолютное значение данной величины неограниченно возрастает, когда угол приближается к тому значению, которое указано в таблице. Это и имеют в виду, когда говорят, что величина «равняется бесконечности» или «обращается в бесконечность» (ср. II, 23 и VI, 12).

Эта таблица имеет более теоретическое, чем практическое значение, так как содержит неизвлекаемые точно корни. Для большинства же углов даже и с помощью корней нельзя записать точные числовые значения тригонометрических функций. Но приближенные их значения можно вычислить с любой желаемой степенью точности (см. V, 26). Вычисления эти требуют большой затраты труда. Поэтому они проделаны раз навсегда, и результаты сведены в таблицы. Таблицы синусов и косинусов (четырехзначные) помещены на стр. 36—39 (II, 6), таблицы тангенсов и котангенсов — на стр. 40—47 (II, 7).

A	$\sin A$	$\cos A$	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{sc} A$	$\csc A$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

§ 6. Отыскание тригонометрической функции по углу[1])

а) Синус и косинус. В таблице I, 6 (стр. 36—39) даны синусы всех углов от 0° до 90° через 1′ с точностью до четвертого знака. Так как синус угла равен косинусу дополнительного угла (V, 5), то по той же таблице можно найти косинусы всех углов от 90° до 0° через 1′.

При отыскании синуса число градусов прочитывается *в левом* столбце «градусы», а округленное число минут (0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′) — *сверху* (об этом напоминает надпись «синусы» над таблицей); при отыскании косинуса число градусов прочитывается в *правом* столбце

1) Если для угла дана его радианная мера, то переводим ее в градусную (см. V, 4).

«градусы», а округленное число минут — *снизу* (об этом напоминает надпись «косинусы» под таблицей). На пересечении соответствующей строки и столбца находим основной результат. На недостающее число минут (от 1 до 9) делается поправка. Она берется в разделе «поправки» в той же строке, где взят основной результат. Если ищется синус, то поправка *прибавляется* к основному результату; если же ищется косинус, то поправка *вычитается* из основного результата (так как при увеличении угла синус увеличивается, а косинус уменьшается).

Пример 1. Найти $\sin 53°40'$.

В *левом* столбце «градусы» берем число 53, а в *верхней* строке — наименование 40′. На пересечении находим 0,8056. Поправки не требуется:

$$\sin 53°40' = 0{,}8056.$$

Пример 2. Найти $\cos 63°10'$.

В *правом* столбце «градусы» берем число 63, а в *нижней* строке — наименование 10′. На пересечении находим 0,4514. Поправки не требуется:

$$\cos 63°10' = 0{,}4514.$$

Пример 3. Найти $\sin 62°24'$.

В *левом* столбце берем 62, в верхней строке — 20′. На пересечении находим основной результат 0,8857. В той же строке раздела «поправки» (столбец 4′) находим число 5 (т. е. 0,0005). Прибавляя его к основному результату, получаем 0,8862.

Запись:

$$\begin{array}{r}\sin 62°20' = 0{,}8857\\ +4' \qquad +5\\ \hline \sin 62°24' = 0{,}8862\end{array}$$

Пример 4. Найти $\cos 42°16'$.

В *правом* столбце берем 42, в нижней строке — 10′. На пересечении находим основной результат 0,7412. В той же строке в разделе «поправки» (столбец 6′) находим число 12. Вычитая его из основного результата, получаем 0,7400.

Запись:

$$\begin{array}{r}\cos 42°10' = 0{,}7412\\ +6' \qquad -12\\ \hline \cos 42°16' = 0{,}7400\end{array}$$

б) Тангенс и котангенс. В таблице I, 7 (стр. 40—47) даны тангенсы всех углов от 0° до 90° через 1′ с точностью до четвертой значащей цифры. В пределах от 0° до 76° таблица устроена так же, как таблица синусов. В промежутке между 76° и 90° (где тангенс изменяется очень неравномерно) раздела «поправки» нет, но зато сама таблица более подробна.

Так как тангенс угла равен котангенсу дополнительного угла (V, 5), то по той же таблице можно найти котангенсы всех углов от 90° до 0° через 1′. При разыскании тангенса значение угла прочитывается так же, как при отыскании синуса по таблице I, 6 (см. пункт а); при отыскании котангенса — как при отыскании косинуса.

Пример 1. Найти tg 82°18′.

В *левом* столбце «градусы» берем 82°10′, в *верхней* строке — 8′. На пересечении находим результат

$$\operatorname{tg} 82°18' = 7{,}396.$$

Пример 2. Найти ctg 12°35′.

В *правом* столбце «градусы» берем 12°30′, в *нижней* строке 5′. Находим:

$$\operatorname{ctg} 12°35' = 4{,}480.$$

Пример 3. Найти ctg 58°36′.

В правом столбце «градусы» берем 58°, в нижней строке 30′. На пересечении находим 0,6128. В той же строке в разделе «поправки» (столбец 6′, снизу) находим число 24. Вычтая его из 0,6128, получаем 0,6104.

Запись:

$$\begin{array}{r} \operatorname{ctg} 58°30' = 0{,}6128 \\ +6' \quad\quad -24 \\ \hline \operatorname{ctg} 58°36' = 0{,}6104 \end{array}$$

Пример 4. Найти tg 48°43′.

Находим:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg} 48°40' = 1{,}1369 \\ +3' \quad\quad +20 \\ \hline \operatorname{tg} 48°43' = 1{,}1389 \end{array}$$

§ 7. Разыскание угла по его тригонометрической функции

Угол по данному его синусу или косинусу отыскивается с помощью таблицы I, 6 (стр. 36 — 39); по тангенсу или котангенсу — с помощью таблицы I, 7 (стр. 40 — 47). Пробегая глазами один из столбцов (например, столбец, помеченный сверху 0′), найдем либо нужное нам значение, либо ближайшее к нему. В первом случае непосредственно прочитываем величину искомого угла (пользуясь левым столбцом градусов и верхней строкой минут, когда имеем дело с синусом и тангенсом, или правым столбцом и нижней строкой, когда имеем дело с косинусом или котангенсом; ср. предыдущий параграф). Во втором случае смотрим, нет ли неподалеку более близкого значения. Если есть, то для него таким же образом прочитываем величину угла; если нет — сохраняем прежде найденное значение. Наконец, когда в этом есть нужда, учитываем поправку. При этом нужно помнить, что возрастанию синуса и тангенса соответствует положительная поправка, а возрастанию косинуса и котангенса — отрицательная [1]).

Пример 1. Найти острый угол α, если $\cos\alpha = 0{,}7173$.

Пробегая глазами столбец таблицы I, 6, *помеченный* сверху 0′, находим значение 0,7193, близкое к данному. Неподалеку от него находим значение 0,7173, совпадающее с данным. Прочитывая градусы в правом столбце, а минуты в нижней строке, находим $\alpha = 44°10'$.

Пример 2. Найти острый угол α, если $\cos\alpha = 0{,}2643$.

В таблице I, 6 ближайшее значение есть 0,2644. Оно разнится от данного на 0,0001, а в разделе «поправки» наименьшее число есть 3 (ему соответствует поправка в 1′). Поэтому поправка не учитывается. Пользуясь правым столбцом градусов и нижней строкой минут, находим $\alpha = 74°40'$.

Пример 3. Найти острый угол α, если $\cos\alpha = 0{,}7458$.

Ближайшему табличному значению 0,7451 соответствует угол 41°50′. Данное значение превышает табличное на 7 единиц четвертого знака. В той же строке раздела «поправки» находим числа 6 и 8. Можно взять любое из них и *вычесть* из угла 41°50′ поправку 3′ или 4′. Получаем 41°47′ (с избытком) или 41°46′ (с недостатком).

Запись:

$$\begin{array}{r}
0{,}7451 = \cos 41°50' \\
\underline{+7 \qquad\qquad -3'} \\
0{,}7458 = \cos 41°47'
\end{array}$$

Пример 4. Найти острый угол α, если $\operatorname{tg}\alpha = 4{,}827$.

В таблице I, 7 находим ближайшее недостаточное значение 4,822 и ближайшее избыточное 4,829. Так как второе ближе к данному, чем первое, то берем второе. В левом столбце читаем 78°10′, в верхней строке 8′. Находим $\alpha = 78°18'$.

---

1) *Если нужно, найденная градусная мера угла может быть переведена в радианную* (см. V, 4).

§ 8. Решение прямоугольных треугольников

1. По двум сторонам. Если даны две стороны прямоугольного треугольника, то третья сторона может быть вычислена по «теореме Пифагора» (IV, Б, 10). Определение же острых углов производится по одной из трех первых формул § 5, смотря по тому, какие стороны даны. Если, например, даны катеты a, b, то острый угол A определяется по формуле

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

а острый угол B находится по формуле $B = 90° - A$.

Случай 1. Даны катет $a = 0{,}528$ *м* и гипотенуза $c = 0{,}697$ *м*.

1) Определение катета b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0{,}697^2 - 0{,}528^2} \approx 0{,}455 \ (м).$$

2) Определение угла A:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{0{,}528}{0{,}697} \approx 0{,}757.$$

По таблице синусов находим: $A \approx 49°10'$ (предельная погрешность $5'$). Находить A с точностью до минуты нет смысла, так как, рассматривая значения a и c как приближенные числа, мы не можем ручаться даже за третью цифру частного $\frac{a}{c} \approx 0{,}757$ (II, 42).

3) Определение угла B:

$$B = 90° - A \approx 90° - 49°10' = 40°50'.$$

Случай 2. Даны катеты $a = 8{,}3$ *см*, $b = 12{,}4$ *см*.

1) Определение гипотенузы c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8{,}3^2 + 12{,}4^2} \approx 14{,}9 \ (см).$$

2) Определение угла A:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{8{,}3}{12{,}4} \approx 0{,}67; \quad A \approx 34°.$$

3) Определение угла B:

$$B = 90° - A \approx 90° - 34° = 56°.$$

2. По стороне и острому углу. Если дан острый угол A, то B найдется по формуле $B = 90° - A$. Стороны же можно найти по формулам § 5, которые можно представить в виде:

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \operatorname{tg} A,$$
$$b = c \sin B, \quad a = c \cos B, \quad b = a \operatorname{tg} B.$$

Выбирать нужно такие формулы, в которые входит данная или уже найденная сторона.

Случай 3. Даны гипотенуза $c = 79{,}79$ *м* и острый угол $A = 66°36'$.

1) Определение угла B: $B = 90° - A = 90° - 66°36' = 23°24'$.

2) Определение катета a: $a = c \sin A = 79{,}79 \cdot \sin 66°36' = 79{,}79 \cdot 0{,}9178 \approx 73{,}23$ (*м*).

3) Определение катета b: $b = c \cos A = 79{,}79 \cdot 0{,}3971 \approx 31{,}68$ (*м*).

Случай 4. Даны катет $a = 12{,}3$ *м* и острый угол $A = 63°00'$.

1) Определение угла B: $B = 90° - 63°00' = 27°00'$.

2) Определение катета b: $b = a \operatorname{tg} B = 12{,}3 \operatorname{tg} 27°00' = 12{,}3 \cdot 0{,}509 \approx 6{,}26$ (*м*).

3) Определение гипотенузы c: $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{12{,}3}{\sin 63°00'} = \frac{12{,}3}{0{,}891} \approx 13{,}8$ (*м*).

§ 9. Таблица логарифмов тригонометрических функций

При решении прямоугольных треугольников приходится всегда выполнять умножение и деление. Если требуемая степень точности значительна (например, если перемножаемые числа четырехзначны), то эти действия отнимают много времени; сверх того, они утомительны, и потому в них легко сделать ошибку. Выполняя их с помощью логарифмов, мы экономим время и силы. При логарифмических вычислениях вместо таблицы тригонометрических величин пользуются таблицей их логарифмов, что дает большую экономию времени (вместо того, чтобы сначала искать синус угла по таблице тригонометрических величин, а затем логарифм этого синуса по таблице логарифмов, ищут прямо логарифм синуса).

В таблице I, 5 (стр. 28—35) даны значения логарифмов синуса, косинуса, тангенса и котангенса с точностью до четвертого десятичного знака через каждые 10'. Если угол *не превышает 45°, то название нужной функции берется* сверху, а величина угла — слева. Если угол превышает 45°, то название функции читаем снизу, а величину угла — справа.

По той же таблице можно вычислить логарифмы тригонометрических функций и через 1′. Способ вычисления (см. V, 10, V, 11) основан на том, что изменение угла в пределах 10′ можно считать пропорциональным изменению lg sin, lg tg, lg cos и lg ctg. Погрешность, проистекающая из этого допущения, как правило, не отразится на четвертом десятичном знаке. *Исключение составляют для lg sin и lg tg* лишь углы, близкие к 0° (от 0° до 4°), а для lg cos и lg ctg лишь углы, близкие к 90° (от 86° до 90°); для таких углов погрешность становится ощутимой.

Поясним это примером. Увеличению угла с 12°20′ до 12°30′ соответствует увеличение lg sin с $\bar{1},3296$ до $\bar{1},3353$, т. е. на 0,0057. Вдвое большему увеличению угла с 12°20′ до 12°40′ [1]) соответствует увеличение lg sin с $\bar{1},3296$ до $\bar{1},3410$, т. е. на 0,0114. Это увеличение вдвое больше предыдущего.

Изменения lg sin, соответствующие росту угла на 10′, нет нужды вычислять. Они помещены в столбцах, отмеченных буквой d [2]). Так, в столбце lg sin против 12°20′ читаем $\bar{1},3296$, против 12°30′ читаем $\bar{1},3353$. Разность $\bar{1},3353 - \bar{1},3296 = 0,0057$ проставлена в левом столбце d. между $\bar{1},3296$ и $\bar{1},3353$ (для краткости записано 57).

Те же разности (только взятые со знаком минус) дают изменения lg cos, соответствующие росту угла на 10′. Так, та же надпись 57 дает *уменьшение* lg cos при росте угла с 77°30′ до 77°40′.

Для lg tg и lg ctg разности проставлены в среднем столбце, озаглавленном d. c. [3]). Они обслуживают сразу два столбца, прилегающих к столбцу d. c. справа и слева. Так, *разности lg tg 12°30′ — lg tg 12°20′ и lg tg 77°40′ — lg tg 77°30′* имеют общее значение 0,0061, проставленное в столбце d. c. между соответствующими строками. Число 0,0061 дает также *уменьшение* lg ctg при росте угла с 12°20′ до 12°30′ и с 77°30′ до 77°40′.

Числа, проставленные в столбцах d. и d. c., называют *«табличными разностями»*.

---

[1]) Мы взяли увеличение, выходящее за пределы 10′, чтобы не прибегать к более подробной таблице. В более тесных пределах пропорциональность и подавно будет иметь место.

[2]) Начальная буква латинского слова differentia (разность).

[3]) То есть differentia communis (общая разность).

§ 10. Разыскание логарифма тригонометрической функции по углу [1])

Для углов, содержащих круглое число минут (0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′), требуемая величина (с точностью до 0,0001) берется прямо из таблицы I, 5, описанной в предыдущем параграфе. Для остальных углов выполняется пропорциональный расчет (интерполяция).

При этом нужно помнить, что для sin *и* tg *знаки поправок угла и логарифмов тригонометрической функции одинаковы, а для* cos *и* ctg — *противоположны.*

Пример 1. Найти $\lg\cos 24°13'$.

Данный угол меньше 45°. Поэтому берем столбец, озаглавленный lg cos *сверху*. Там находим [2]) $\lg\cos 24°10' = \bar{1},9602$. Табличная разность (число в правом столбце d.) $(= \lg\cos 24°10' - \lg\cos 24°20') = 0,0006$. Найдем поправку x на 3′. Из пропорции

$$x : 0,0006 = 3' : 10'$$

находим:

$$x = 0,0006 \cdot 0,3 \approx 0,0002.$$

Эту поправку нужно *вычесть* из $\bar{1},9602$. Получаем:

$$\lg\cos 24°13' = \bar{1},9600.$$

Запись:

$$\begin{array}{rl} \lg\cos 24°10' = \bar{1},9602 & d = 6 \\ +3' \quad\quad -2 & \\ \hline \lg\cos 24°13' = \bar{1},9600 & \end{array}$$

Замечание. Для разыскания поправки нет нужды производить письменный расчет. Достаточно число минут помножить (в уме) на табличную разность и, округлив произведение, отбросить нуль, стоящий в конце. В нашем примере нужно помножить 3 на 6 и произведение 18 округлить до 20. Отбрасывая нуль, находим поправку 2.

Пример 2. Найти $\lg\operatorname{tg} 57°48'$.

Данный угол больше 45°. Поэтому смотрим в столбец, озаглавленный lg tg *снизу*. Оттуда берем $\lg\operatorname{tg} 57°50' = 0,2014$; d. c. $(= \lg\operatorname{tg} 57°50' - \lg\operatorname{tg} 57°40') = 28$ (т. е. 0,0028). Ищем поправку на *недостающие* 2′. Помножаем (см. за-

---

[1]) Если для угла дана его радианная мера, то предварительно переводим ее в градусную (V, 4).

[2]) Нужно помнить, что в таблице I, 5 характеристики всех логарифмов увеличены на 10, т. е. вместо $\bar{1}$ написано 9, вместо $\bar{2}$ написано 8 и т. д.

мечание к примеру 1) 2 на 28. Находим (округленно) 60. Отбросив нуль, находим поправку 6. Вычитаем ее из 0,2014. Получаем $\lg \operatorname{tg} 57°48' = 0,2008$.

Запись:

$$\begin{array}{ll} \lg \operatorname{tg} 57°50' = 0,2014 & d = 28 \\ \quad -2' \qquad\quad -6 & \\ \hline \lg \operatorname{tg} 57°48' = 0,2008 & \end{array}$$

Замечание. Можно взять из таблицы $\lg \operatorname{tg} 57°40' = 0,1986$, найти поправку 22 ($8 \cdot 28 \approx 220$), приходящуюся на 8, и *прибавить* ее к 0,1986. Результат будет тот же, но умножать 28 на 2 легче, чем на 8, так что меньше шансов ошибиться при действиях в уме.

Пример 3. Найти $\lg \operatorname{ctg} 65°17'$.

$$\begin{array}{ll} \lg \operatorname{ctg} 65°20' = \bar{1},6620 & d = 34 \\ \quad -3' \qquad\quad +10 & \\ \hline \lg \operatorname{ctg} 65°17' = \bar{1},6630 & \end{array}$$

Пример 4. Найти $\lg \sin 40°34'$.

$$\begin{array}{ll} \lg \sin 40°30' = \bar{1},8125 & d = 15 \\ \quad +4' \qquad\quad +6 & \\ \hline \lg \sin 40°34' = \bar{1},8131 & \end{array}$$

§ 11. Разыскание угла по логарифму тригонометрической функции

Пробегая глазами соответствующие столбцы таблицы I, 5 (значения каждой функции размещаются в двух столбцах), находим либо нужное нам значение, либо ближайшее к нему; в последнем случае выписываем табличную разность. Если наименование данной тригонометрической функции стоит сверху, то градусы и десятки минут прочитываем слева; если же снизу, то — справа. Наконец, если в этом есть нужда, находим поправку угла с помощью пропорционального расчета (для sin и tg поправка угла имеет тот же знак, что поправка логарифма тригонометрических функций; для cos и ctg — противоположный).

Пример 1. Найти острый угол α, если $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0,2541$. Значение 0,2533, ближайшее к данному (табличная разность d. c. $= 29$), стоит в том столбце lg tg, где это наименование написано *снизу*. Поэтому читаем *справа* 60°50'. Поправку x

на избыточные 8 единиц последнего знака ($0{,}2541 - 0{,}2533 = 0{,}0008$) находим из пропорции

$$x : 10' = 8 : 29,$$

откуда $x = \frac{10' \cdot 8}{29} \approx 3'$. Прибавляя эту поправку, находим $\alpha = 60°53'$.

Запись:

$$\begin{array}{l}
\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2541 \\
\qquad 0{,}2533 = \lg \operatorname{tg} 60°50' \quad d = 29 \\
\qquad\quad +8 \qquad\qquad +3' \\
\hline
\qquad 0{,}2541 = \lg \operatorname{tg} 60°53' \\
\qquad\quad \alpha = 60°53'.
\end{array}$$

З а м е ч а н и е. Поправку можно найти в уме следующим образом. Рассматриваем разность между данным значением и табличным — в нашем примере 0,0008 — как целое число 8 (т. е. не обращаем внимания на запятую и нули слева). Взяв его десятикратно (80), делим на табличную разность (29). Округленное (до единиц) частное — в нашем примере 3 — дает поправку в минутах.

П р и м е р 2. Найти острый угол α, если $\lg \cos \alpha = \bar{1},4361$.

Ближайшее табличное значение $\bar{1},4359$; табличная разность $d = 44$. Наименование $\lg \cos$ стоит *снизу*. Поэтому читаем *слева* 74°10'. Десятикратная разность между данным значением и табличным есть 20. Частное $\frac{20}{53}$ (оно меньше половины) округленно равно нулю.

Значит, $\alpha = 74°10'$.

П р и м е р 3. Найти острый угол α, если $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1},6780$.

Ближайшее табличное значение $\bar{1},6785$; табличная разность 32. Наименование $\lg \operatorname{ctg}$ стоит *снизу*. Прочитываем *справа* 64°30'. Данное значение меньше табличного на 5. Десятикратное число 50 делим на 32. Частное округленно равно 2. Прибавляем 2'; находим $\alpha = 64°32'$.

Запись:

$$\begin{array}{l}
\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1},6780 \\
\qquad \bar{1},6785 = \lg \operatorname{ctg} 64°30' \quad d = 32 \\
\qquad\quad -5 \qquad\qquad +2' \\
\hline
\qquad \bar{1},6780 = \lg \operatorname{ctg} 64°32'
\end{array}$$

Пример 4. Найти острый угол α, если $\lg \sin \alpha = \bar{1},7414$.

$$\begin{array}{l} \lg \sin\alpha = \bar{1},7414 \\ \quad \bar{1},7419 = \lg \sin 33^\circ 30' \qquad d = 19 \\ \quad\;\; -5 \qquad\qquad\quad -3' \\ \hline \quad \bar{1},7414 = \lg \sin 33^\circ 27' \\ \quad\quad \alpha = 33^\circ 27'. \end{array}$$

§ 12. Решение прямоугольных треугольников с помощью логарифмирования

Случай 1. Даны: гипотенуза $c = 9{,}994$, катет $b = 5{,}752$. Определить a, B, A.

1) Определение B: $\sin B = \frac{b}{c}$,

$$\begin{array}{r} \lg b = 0{,}7598 \\ -\lg c = \bar{1}{,}0003 \\ \hline \lg \sin b = \bar{1}{,}7601; \end{array} \qquad B = 35^\circ 8'.$$

2) Определение A: $A = 90^\circ - B = 54^\circ 52'$.

3) Определение a: $a = b \operatorname{tg} A$;

$$\begin{array}{r} \lg b = 0{,}7598 \\ \lg \operatorname{tg} A = 0{,}1526 \\ \hline \lg a = 0{,}9124; \end{array} \qquad a = 8{,}173.$$

Случай 2. Даны катеты $a = 0{,}920$ и $b = 0{,}849$. Определить гипотенузу и острые углы.

1) Определение угла B: $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$,

$$\begin{array}{r} \lg b = \bar{1}{,}9289 \\ -\lg a = 0{,}0362 \\ \hline \lg \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}9651; \end{array} \qquad B = 42^\circ 42'.$$

2) Определение угла A: $A = 90^\circ - B = 47^\circ 18'$.

3) Определение гипотенузы c: $c = \frac{b}{\sin B}$,

$$\begin{array}{r} \lg b = \bar{1}{,}9289 \\ -\lg \sin B = 0{,}1687 \\ \hline \lg c = 0{,}0976; \end{array} \qquad c = 1{,}252.$$

Случай 3. Даны: гипотенуза $c = 798{,}1$, острый угол $A = 49°18'$. Определить a, b, B.

1) Определение B: $B = 90° - 49°18' = 40°42'$.

2) Определение a: $a = c \sin A$,

$$\begin{array}{r} \lg c = 2{,}9021 \\ \lg \sin A = \bar{1}{,}8797 \\ \hline \lg a = 2{,}7818; \end{array} \qquad a = 605{,}1.$$

3) Определение b: $b = c \sin B$,

$$\begin{array}{r} \lg c = 2{,}9021 \\ \lg \sin B = \bar{1}{,}8143 \\ \hline \lg b = 2{,}7164; \end{array} \qquad b = 520{,}5.$$

Случай 4. Даны: катет $a = 324{,}6$; острый угол $B = 49°28'$. Определить b, c, A.

1) Определение A:

$$A = 90° - B = 90° - 49°28' = 40°32'.$$

2) Определение b: $b = a \operatorname{tg} B$,

$$\begin{array}{r} \lg a = 2{,}5113 \\ \lg \operatorname{tg} b = 0{,}0680 \\ \hline \lg b = 2{,}5793; \end{array} \qquad b = 379{,}6.$$

3) Определение c: $c = \frac{a}{\sin A}$,

$$\begin{array}{r} \lg a = 2{,}5113 \\ -\lg \sin A = 0{,}1872 \\ \hline \lg c = 2{,}6985; \end{array} \qquad c = 499{,}5.$$

§ 13. Практические применения решения прямоугольных треугольников

Для использования изложенных приемов решения задач на практике необходимо прежде всего хорошо освоиться с таблицами и научиться безошибочно отыскивать по ним результаты. Но этого мало; остаются еще две трудности. Первая — чисто геометрического характера. Нужно *научиться отыскивать* в данной геометрической фигуре простой способ выделения в ней прямоугольного треугольника. Приводим типичные примеры.

Пример 1. В равнобедренном тр-ке ABC (рис. 220) известно основание AC и боковая сторона AB. Определить угол B при вершине.

Проводим высоту BD, которая разделит основание AC и угол B при вершине пополам. Зная AC, найдем $AD = \frac{AC}{2}$. В прямоугольном тр-ке ABD по катету AD и гипотенузе AB найдем (случай 1 § 8 и 12) $\angle ABD$. Удвоив его, найдем искомый угол при вершине.

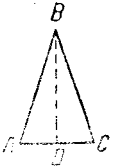


Рис. 220.

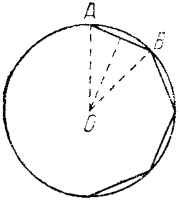


Рис. 221.

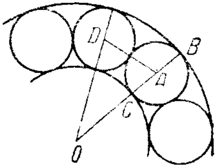


Рис. 222.

Пример 2. Дан радиус круга R, вычислить сторону AB правильного вписанного девятиугольника.

Проводя радиусы OA, OB к концам хорды AB (рис. 221), получаем равнобедренный тр-к, в котором известна боковая сторона $OA = R$. Кроме того, легко найти угол при вершине $\angle AOB = \frac{360°}{9} = 40°$. Разбивая тр-к AOB на два прямоугольных тр-ка высотой, как в предыдущей задаче, приведем задачу к случаю 3 § 8 и 12.

Другая трудность — наиболее существенная — состоит в том, чтобы конкретно поставленную задачу *перевести на математический язык*.

Пример 3. Рассчитать, каковы должны быть внутренний и внешний радиусы шарикового подшипника, чтобы в него уложилось двадцать стальных шариков диаметром 16 *мм*.

(Для упрощения задачи мы предположим, что шарики должны лежать вплотную.)

Основная трудность этой задачи состоит в том, чтобы выделить в ней ее математическое содержание. Построив рис. 222, замечаем, что нам известен диаметр шарика $BC = 16$ *мм*, а значит, и его радиус $AB = AC = 8$ *мм*. Сверх того, угол между радиусами OA и OD, идущими в центры соседних шариков, должен составить $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$. Далее, отрезок AD, соединяющий центры касающихся шаров, должен равняться диаметру каждого из них, т. е. $AD = 16$ *мм*. Теперь мы имеем равнобедренный тр-к AOD, в котором известно основание $AD = 16$ *мм* и угол при вершине $\angle AOD = 18^\circ$. Разбивая его на два прямоугольных тр-ка, приводим задачу к случаю 4 § 12 и получаем $OD = OA = 51,1$ *мм*. Отсюда находим внешний радиус

$$OB = OA + AB = 51,1 + 8 = 59,1 \text{ мм}$$

и внутренний радиус

$$OC = OA - AC = 43,1 \text{ мм}.$$

§ 14. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Зная одну из тригонометрических величин некоторого острого угла, можно по нижеприводимым формулам вычислить все остальные. Однако главное их значение состоит в том, что с их помощью можно, значительно упрощая вид многих общих формул, сократить процесс вычисления.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1; \quad \cos\alpha \cdot \operatorname{sc}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{sc}^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \operatorname{csc}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Эти формулы остаются справедливыми и для тригонометрических функций любого угла (см. следующий параграф).

§ 15. Тригонометрические функции любого угла

Можно было бы построить всю тригонометрию, пользуясь только тригонометрическими величинами острых углов. Однако тогда при решении косоугольных треугольников и в других вопросах, требующих применения тригонометрии, нужно было бы различать множество отдельных случаев одной и той же задачи, смотря по тому, какова величина того или иного заданного угла. Напротив, решение всех задач принимает единообразную форму, если следующим образом распространить понятие синус косинус и т. д. на углы любой величины, не только заключенные между 0 и 180°, но и превосходящие 180°, не только положительные, но и отрицательные (см. IV, Б, 5).

Для отсчета углов берем окружность $ABA'B'$ (рис. 223) с двумя взаимно перпендикулярными диаметрами AA' («первый» диаметр) и BB' («второй»). Точку A примем за начало отсчета дуг. Направление, противоположное движению часовой стрелки, будем считать положительным. «Подвижный» радиус OM с «неподвижным» OA образует угол α. Он может принадлежать первой четверти (MOA), второй (M_1OA), третьей (M_2OA) или четвертой (M_3OA). Считая положительными направления OA, OB и отрицательными OA, OB, мы определяем тригонометрические функции углов так:

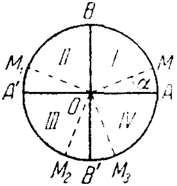


Рис. 223

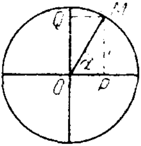


Рис. 224.

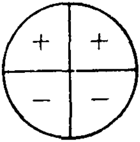


Рис. 225. Знаки синуса и косеканса в различных четвертях окружности.

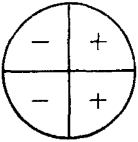


Рис. 226. Знаки косинуса и секанса в различных четвертях окружности.

Линия синуса угла α (рис. 224) есть проекция OQ подвижного радиуса на второй диаметр (взятая с соответствующим знаком); *линия косинуса* OP — проекция подвижного радиуса на первый диаметр.

Синус угла α (рис. 224) есть отношение линии синуса OQ[1]) к радиусу R окружности; *косинус* — отношение линии косинуса OP[1]) к радиусу. На рис. 225 указаны знаки синуса, на рис. 226 — знаки косинуса в разных четвертях.

---

[1]) Взятой с соответствующим знаком.

Выражения одних тригонометрических функций через другие:

	sin	cos	tg	ctg	sc	csc
$\sin x$		$=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}{\operatorname{sc} x}$	$=\dfrac{1}{\csc x}$
$\cos x$	$=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$=\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$	$=\dfrac{1}{\operatorname{sc} x}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}{\csc x}$
$\operatorname{tg} x$	$=\dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$	$=\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$
$\operatorname{ctg} x$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$=\dfrac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$		$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}$	$=\pm\sqrt{\csc^2 x-1}$
$\operatorname{sc} x$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$=\dfrac{1}{\cos x}$	$=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$		$=\dfrac{\csc x}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$
$\csc x$	$=\dfrac{1}{\sin x}$	$=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$=\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$	$=\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$	$=\dfrac{\operatorname{sc} x}{\pm\sqrt{\operatorname{sc}^2 x-1}}$	

Линия тангенса (AD_1, AD_2 и т. д.) есть отрезок касательной, проведенной через конец A первого диаметра, от точки касания до пересечения с продолжением подвижного радиуса (OM_1, OM_2 и т. д., рис. 227).

Линия котангенса (BE_1, BE_2 и т. д.) есть отрезок касательной, проведенной через конец B второго диаметра, от точки касания B до пересечения с продолжением подвижного радиуса (OM_1, OM_2-и т. д., рис. 228).

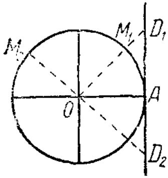


Рис. 227.

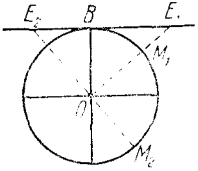


Рис. 228.

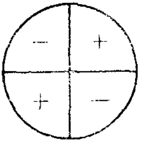


Рис. 229. Знаки тангенса и котангенса в различных четвертях окружности.

Тангенс угла есть отношение линии тангенса[1] к радиусу,

Котангенс — отношение линии котангенса[1] к радиусу.

Знаки тангенса и котангенса для различных четвертей указаны на рис. 229.

Секанс и косеканс проще всего определить как обратные величины косинуса и синуса.

В таблице, помещенной на стр. 360, даны выражения каждой из тригонометрических функций любого угла через все остальные. В тех выражениях, которые сопровождаются двумя знаками, выбор знака зависит от того, в какой четверти лежит угол (см. рис. 225, 226, 229).

Графики тригонометрических функций даны в VI, 8.

§ 16. Формулы приведения

Так называются нижеприведенные формулы, дающие возможность: 1) находить численные значения тригонометрических функций углов, превышающих 90°, 2) совершать преобразования, упрощающие вид формул.

[1]) Взятой с соответствующим знаком.

Все эти формулы верны для всяких углов α, хотя употребляются преимущественно в тех случаях, когда α — острый угол.

I группа:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \quad \cos(-\alpha) = +\cos\alpha.$$

Эти формулы позволяют избавиться от рассмотрения отрицательных углов.

II группа:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \operatorname{tg}\\ \operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}(360^\circ k+\alpha) = \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \operatorname{tg}\\ \operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}\alpha$$

(здесь k — целое положительное число).

Эти формулы позволяют избавиться от рассмотрения углов, бо́льших 360°.

III группа:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \operatorname{tg}\\ \operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}(180^\circ \pm \alpha) = \left.\begin{matrix}\mp\sin\\ -\cos\\ \pm\operatorname{tg}\\ \pm\operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}\alpha.$$

Названия функций сохраняются; знак в правой части берется тот, который будет иметь левая часть при остром угле α.

Например, $\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin\alpha$, так как при остром α угол $180^\circ - \alpha$ лежит во второй четверти, для которой синус положителен; $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, так как при остром α угол $180^\circ + \alpha$ лежит в третьей четверти, для которой синус отрицателен; $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, так как косинус во второй четверти отрицателен, и т. д.

IV группа:

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \operatorname{tg}\\ \operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}(90^\circ \pm \alpha) = \left.\begin{matrix}+\cos\\ \mp\sin\\ \mp\operatorname{ctg}\\ \mp\operatorname{tg}\end{matrix}\right\}\alpha; \quad \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \operatorname{tg}\\ \operatorname{ctg}\end{matrix}\right\}(270^\circ \pm \alpha) = \left.\begin{matrix}-\cos\\ \pm\sin\\ \mp\operatorname{ctg}\\ \mp\operatorname{tg}\end{matrix}\right\}\alpha.$$

Название функции меняется: вместо каждой функции берется ее «дополнительная». Правило знаков то же, что и в предыдущей группе. Например, $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$, так-как угол $270^\circ - \alpha$ при остром α принадлежит третьей четверти, где косинус отрицателен; $\cos(270^\circ + \alpha) = +\sin\alpha$, так как в четвертой четверти косинус положителен.

Функции	Углы								
	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ k-\alpha$	$360^\circ k+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$
sc	$+\mathrm{sc}\,\alpha$	$+\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$+\mathrm{csc}\,\alpha$	$+\mathrm{sc}\,\alpha$	$+\mathrm{sc}\,\alpha$
csc	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$+\mathrm{sc}\,\alpha$	$+\mathrm{sc}\,\alpha$	$+\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{sc}\,\alpha$	$-\mathrm{csc}\,\alpha$	$+\mathrm{csc}\,\alpha$

Все вышеприведенные формулы можно получить, пользуясь следующим правилом:

Любая тригонометрическая функция угла $90°n + \alpha$ *по абсолютной величине равна той же функции угла* α, *если число* n — *четное, и дополнительной функции, если число* n — *нечетное. При этом, если функция угла* $90°n + \alpha$ *положительна, когда* α — *острый угол, то знаки обеих функций одинаковы; если отрицательна, то различны.*

Результаты данных выше формул приведения сведены в помещенную на стр. 363 таблицу, в которую добавлены графы для секанса и косеканса.

§ 17. Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

§ 18. Формулы двойных, тройных и половинных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Знаки перед радикалами берутся в соответствии с тем, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$ (V, 15—16).

§ 19. Преобразование тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha);$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}; \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\csc 2\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha;$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos\alpha};$$

$$1 \pm \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \pm 1 = \frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta};$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta};$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha; \quad \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha.$$

§ 20. Преобразование к логарифмическому виду выражений, в которые входят углы треугольника

Если A, B, C — углы тр-ка или вообще если $A+B+C=180°$, то некоторые выражения, не имеющие логарифмического вида, можно привести к логарифмическому виду с помощью следующих формул, которые полезны при решении косоугольных треугольников:

$$\sin A+\sin B=2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{\sin C}{\cos A\cos B};$$

$$\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B=\frac{\sin C}{\sin A\sin B};$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\cdot\operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

§ 21. Некоторые важные соотношения

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

Этими формулами можно пользоваться, чтобы избежать умножения (при вычислениях без логарифмов ими часто пользуются в высшей математике, например при интегрировании тригонометрических функций).

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Эти формулы полезны при решении тригонометрических уравнений (в высшей математике — при интегрировании тригонометрических функций).

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots;$$

$$\sin n\alpha = n\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots$$

В последних двух формулах C_n^k — биномиальные коэффициенты (см. III, 72). Знаки членов чередуются; правые части обрываются «сами собой», заканчиваясь нулевой или первой степенью косинуса.

Примеры.

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha;$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha;$$
$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

§ 22. Основные соотношения между элементами треугольника [1]

Обозначения: a, b, c — стороны; A, B, C — углы тр-ка; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; h — высота; S — площадь; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; r_a — радиус круга, касающегося стороны a и продолжения сторон b и c (вневписанный круг); h_a — высота, опущенная на сторону a; β_A — биссектриса угла A.

1) Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \text{ или } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(ср. IV, Б, 10).

---

[1] Все нижеприведенные формулы даются только в одном варианте; из каждой формулы получаются еще две аналогичные с помощью соответствующей замены букв. Например, из формулы $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ получаем $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

2) Из нее выводятся «формулы половинных углов»:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=$$
$$=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-a},$$

из них получаем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p};\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{p-a}.$$

3) Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Из нее выводятся следующие две формулы.

4) Теорема тангенсов (формула Региомонтана)

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

5) Формулы Мольвейде

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

6) Формулы площади

$$S=\frac{bc\sin A}{2};\qquad S=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\qquad S=\frac{h_b^2\sin B}{2\sin A\sin C};$$

$$S=r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2};$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

$$S=p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2};\qquad S=\frac{h_a^2\sin A}{2\sin B\sin C};\qquad S=\sqrt{rr_ar_br_c}$$

7) Радиусы описанного, вписанного и вневписанного кругов

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{bc}{2h_a};$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r;$$

$$r = \frac{S}{p} = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= \frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

8) Биссектриса

$$\beta_A = \frac{h_a}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

§ 23. Решение косоугольных треугольников

Случай 1. Даны три стороны a, b, c.

а) При пользовании натуральными таблицами сначала найдем один из углов по теореме косинусов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Второй угол (например, B) найдется по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a}.$$

Третий угол найдется по формуле

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Если нужна значительная точность (даже до 10′), вычисление (особенно первого результата) чрезвычайно утомительно.

b) При пользовании таблицами логарифмов углы A, B, C (достаточно вычислить два из них) находятся по одной из формул половинных углов (§ 22, п. 2).

Запись вычисления.

Даны: $a = 74$, $b = 130$, $c = 186$.

$$2p = a + b + c = 390, \quad p = 195, \ \lg p = 2{,}2900,$$

$$\begin{array}{r|l} p - a = 121 & \lg(p-a) = 2{,}0828 \\ p - b = 65 & \lg(p-b) = 1{,}8129 \\ p - c = 9 & \lg(p-c) = 0{,}9542. \end{array}$$

1) Вычисление A:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\begin{array}{r} \lg(p-b) = 1{,}8129 \\ \lg(p-c) = 0{,}9542 \\ \text{доп. } \lg p = \bar{3}{,}7100 \\ \text{доп. } \lg(p-a) = \bar{3}{,}9172 \\ \hline \bar{2}{,}3943 \end{array}$$

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\cdot \bar{2}{,}3943 = \bar{1}{,}1971;$$

$$\frac{A}{2} = 8°57'; \quad A = 17°54'.$$

2) Вычисление B:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

Аналогичная выкладка дает результат

$$B = 32°40'.$$

3) Вычисление C (контрольное):

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Результат: $C = 129°26'$

$$\begin{array}{r} \text{Проверка: } A = 17°54' \\ B = 32°40' \\ C = 129°26' \\ \hline A + B + C = 180°. \end{array}$$

Случай 2. Даны две стороны a, b и угол между ними C.

a) При пользовании натуральными таблицами находим сначала сторону c по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C;$$

затем угол A по теореме синусов:

$$\sin A = \frac{a\sin C}{c};$$

при этом угол A, соответствующий найденному синусу будет острым, если $\frac{b}{a} > \cos C$, и тупым, если $\frac{b}{a} < \cos C$.

Третий угол определяется либо по формуле $C = 180° - (A + B)$, либо так же, как A (для контроля). Вычисление стороны c с большой точностью утомительно.

b) При пользовании таблицами логарифмов сторона c находится по теореме синусов уже после того, как определены углы A, B. Последние же находятся по формуле Региомонтана

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}},$$

из которой по данным a, b, C находим $\frac{A-B}{2}$, и, так как кроме того, известно $\frac{A+B}{2}\left(= 90° - \frac{C}{2}\right)$, получаем легко и сами A, B.

Запись вычисления.

Даны: $a = 289$, $b = 601$, $C = 100°19'$.

1) Вычисление $\frac{B-A}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a}\operatorname{ctg}\frac{C}{2};$$

$$\lg(b-a) = 2{,}4942$$

$$\lg\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}9214$$

$$\text{доп. } \lg(b+a) = \bar{3}{,}0506$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \bar{1}{,}4662; \qquad \frac{B-A}{2} = 16°18'.$$

2) Вычисление B и A:

$$\frac{B+A}{2} = 90° - \frac{C}{2} = 39°50'; \quad \frac{B-A}{2} = 16°18';$$

складывая, имеем $B = 56°8'$. Вычитая, получаем $A = 23°32'$.

3) Вычисление стороны c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$\lg a = 2,4609$$
$$\lg \sin C = \bar{1},9929$$
$$\text{доп. } \lg \sin A = 0,3987$$
$$\overline{\lg c = 2,8525; \quad c = 712,0.}$$

Случай 3. Даны два любых угла (например, A, B) и сторона c. Как при пользовании логарифмами, так и не пользуясь ими, ведем вычисление в следующем порядке: сначала определяем третий угол треугольника по формуле $180° - (A + B)$, затем стороны a, b по теореме синусов. При логарифмическом вычислении запись такова.

Даны: $A = 55°20'$, $B = 44°41'$, $c = 795$.

1) Вычисление угла C: $C = 180° - (A + B) = 79°59'$

2) Вычисление стороны a:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C};$$

$$\lg c = 2,9004$$
$$\lg \sin A = \bar{1},9151$$
$$\text{доп. } \lg \sin C = 0,0067$$
$$\overline{\lg a = 2,8222; \quad a = 664,0.}$$

3) Вычисление стороны b:

По формуле $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ так же, как выше, находим $b = 567,7$.

Случай 4. Даны две стороны a, b и угол B, противолежащий одной из них.

И с помощью логарифмов, и без них ведем вычисление так: сначала находим угол A, противолежащий другой данной стороне по теореме синусов: $\sin A = \frac{a \sin B}{b}$.

При этом могут представиться следующие возможности:

a) $a > b$; $a \sin B > b$ — задача не имеет решения;

b) $a > b$; $a \sin B = b$ — одно решение; угол A — прямой;

c) $a > b$; $a \sin B < b < a$ — задача допускает два решения: угол A, соответствующий вычисленному синусу, можно взять либо острым, либо тупым:

d) $a \leqslant b$ — задача допускает одно решение: угол A берется острый.

Определив угол A, находим C по формуле $C = 180° - (A + B)$. Если A может иметь два значения, то два значения получаются и для C. Наконец, третья сторона c находится по теореме синусов $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$. Если найдено два значения C, то и для c получаем два значения, и, таким образом, условию удовлетворяют два различных треугольника.

Запись вычисления.

Даны: $a = 360{,}0$; $b = 309{,}0$; $B = 21°14'$.

Имеем: $a > b$ и $a \sin B < b$ (обнаруживается в ходе ближайшей выкладки). Следовательно, налицо случай 4c).

1) Вычисление угла A:

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}.$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 2{,}5563 \\ \lg \sin B = \bar{1}{,}5589 \\ \text{доп. } \lg b = \bar{3}{,}5100 \\ \hline \lg \sin A = \bar{1}{,}6252 \end{array}$$ [1];

первое решение $A_1 = 24°57'$; второе решение $A_2 = 180° - 24°57' = 155°3'$.

2) Вычисление угла $C = 180° - (A + B)$:
первое решение $C_1 = 133°49'$; второе решение $C_2 = 3°43'$.

3) Вычисление стороны c:

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B};$$

первое решение	второе решение
$\lg b = 2{,}4900$	$\lg b = 2{,}4900$
$\lg \sin C_1 = \bar{1}{,}8583$	$\lg \sin C_2 = \bar{2}{,}8117$
доп. $\lg \sin B_1 = 0{,}4411$	доп. $\lg \sin B_2 = 0{,}4411$
$\lg c_1 = 2{,}7894$; $c_1 = 615{,}7$;	$\lg c_2 = 1{,}7428$; $c_2 = 55{,}31$.

[1]) Если бы было $a \sin B > b$, то характеристика логарифма была бы положительной и задача не имела бы решения.

§ 24. Обратные тригонометрические (круговые) функции

Соотношение $x = \sin y$ позволяет с помощью таблиц найти как x по данной величине y, так и y по данной величине x (не превышающей 1 по абсолютной величине). Таким образом, можно считать не только синус функцией угла, но и угол функцией синуса. Этот факт находит внешнее выражение в записи $y = \arcsin x$ (arc sin читается «арксинус»). Например, вместо $\frac{1}{2} = \sin 30°$ можно написать $30° = \arcsin \frac{1}{2}$. Обычно при этой второй записи угол выражается в радианной, а не в градусной мере, так что пишут $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$. Хотя эта запись представляет лишь «пересказ» записи $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, но учащимся она на первых порах доставляет затруднения. Между тем учащийся не видит трудности, когда наряду с соотношением $2^3 = 8$ пишет $2 = \sqrt[3]{8}$. Это потому, что извлечение корня совершается по одним правилам, а возведение в степень по другим, и учащийся привыкает видеть здесь два различных *действия*. Нахождение же синуса по углу и угла по синусу совершается по одним и тем же таблицам, в которых к тому же выделено название «синус», а «арксинус» не упоминается. Поэтому никакого особого *действия*, результатом которого был бы арксинус, учащийся не усматривает; и вообще в пределах элементарной математики введение этого понятия по существу не оправдывается. В высшей же математике арксинус часто появляется как необходимый результат некоторого *действия* (интегрирования), и именно здесь возникло понятие арксинуса и его обозначение.

Определение. $\arcsin x$ есть угол, синус которого равен x. Аналогично определяются $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccsc} x$. Функции $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д. обратны (см. VI, 3) функциям $\sin x$, $\cos x$ и т. д. (подобно тому как функция $\sqrt{x}$ обратна функции x^2). Поэтому они называются *обратными тригонометрическими функциями* (иначе *круговыми*). Все обратные тригонометрические функции многозначны, т. е. для каждой из них справедливо следующее: одному значению x соответствует (бесчисленное) множество значений функции (так как бесчисленное множество углов, например α, $180° - \alpha$, $360° + \alpha$, имеет один и тот же синус).

Главным значением $\arcsin x$ называется то его значение, которое заключено между $-\frac{\pi}{2}$ $(-90°)$ и $+\frac{\pi}{2}$ $(+90°)$.

Так, главное значение $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ есть $\frac{\pi}{4}$; главное значение $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ есть $-\frac{\pi}{4}$.

Главным значением $\arccos x$ называется то его значение, которое заключается между 0 и π $(+180°)$. Так, главное значение $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ есть $\frac{\pi}{4}$; главное значение $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ есть $+\frac{3}{4}\pi$.

Главные значения $\operatorname{arcctg} x$ и $\operatorname{arcsec} x$ (как и $\arccos x$) содержатся между 0 и π. Главные значения $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccsc} x$ (так же как и для $\arcsin x$) находятся между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$.

Примеры. Главные значения $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,

$$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = +\frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arcsec}(-2) = +\frac{2}{3}\pi$$

Если через $\operatorname{Arc}\sin x$, $\operatorname{Arc}\cos x$ и т. д. обозначить любое из значений соответствующих обратных тригонометрических функций, а для главных значений сохранить обозначения $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д., то связь между значениями обратной тригонометрической функции и ее главным значением представится следующими формулами:

$$\operatorname{Arc}\sin x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \tag{1}$$

$$\operatorname{Arc}\cos x = 2k\pi \pm \arccos x, \tag{2}$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x, \tag{3}$$

$$\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x = k\pi + \operatorname{arcctg} x, \tag{4}$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль)

Графики обратных тригонометрических функций см. VI, 8.

Пример 1. $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2}=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$.

При $k=0$ имеем $0\cdot\pi+(-1)^0\ \frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ (или 30° – главное значение);

при $k=1$ » $1\cdot\pi+(-1)\ \frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ (или 150°);

» $k=2$ » $2\cdot\pi+(-1)^2\ \frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}=2\frac{1}{6}\pi$ (или 390°);

» $k=-1$ имеем:

$-\pi+(-1)^{-1}\frac{\pi}{6}=-\pi-\frac{\pi}{6}=-1\frac{1}{6}\pi$ (или -210°);

при $k=-2$ имеем:

$-2\pi+(-1)^{-2}\frac{\pi}{6}=-2\pi+\frac{\pi}{6}=-1\frac{5}{6}\pi$ (или -330°)

и т. д.

Пример 2. $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{2}=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

При $k=0$ имеем $\frac{\pi}{3}$ (или 60° – главное значение) и $-\frac{\pi}{3}$. (или -60°); при $k=1$ имеем $2\pi+\frac{\pi}{3}=2\frac{1}{3}\pi$ или 420°) и $2\pi-\frac{\pi}{3}=1\frac{2}{3}\pi$ (или 300°) и т. д.

§ 25. Основные соотношения для обратных тригонометрических функций[1])

$$\sin\operatorname{Arc}\sin a=a; \qquad \operatorname{Arc}\sin(\sin\alpha)=k\pi+(-1)^k\alpha;$$
$$\cos\operatorname{Arc}\cos a=a; \qquad \operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha)=2k\pi\pm\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\operatorname{Arc}\operatorname{tg} a=a; \qquad \operatorname{Arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg}\alpha)=k\pi+\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} a=a; \qquad \operatorname{Arc}\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=k\pi+\alpha;$$

$$\left.\begin{aligned}
\arcsin a &= \arccos\sqrt{1-a^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};\\
\arccos a &= \arcsin\sqrt{1-a^2}=\operatorname{arc\,ctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}};\\
\operatorname{arc\,tg} a &= \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{a}=\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}};
\end{aligned}\right\}\ \text{при } a>0,$$

$$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,ctg} a=\frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{arc\,sec} a+\operatorname{arc\,csc} a=\frac{\pi}{2}.$$

[1]) Корни, входящие во все формулы этого параграфа, – *положительные* числа.

$$\mathrm{Arc}\sin a + \mathrm{Arc}\sin b = \mathrm{Arc}\sin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right),$$
$$\mathrm{Arc}\sin a - \mathrm{Arc}\sin b = \mathrm{Arc}\sin\left(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right),$$
$$\mathrm{Arc}\cos a + \mathrm{Arc}\cos b = \mathrm{Arc}\cos\left(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right),$$
$$\mathrm{Arc}\cos a - \mathrm{Arc}\cos b = \mathrm{Arc}\cos\left(ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right),$$

$$\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,a + \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,b = \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,\frac{a+b}{1-ab},$$

$$\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,a - \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,b = \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,\frac{a-b}{1+ab}.$$

$$\begin{array}{l}\arcsin a +\\ +\arcsin b\end{array} = \begin{cases} \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right) & (\text{если } a^2+b^2<1, \\ & \text{а также, если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab<0) \\ \pm\left[\pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)\right] & \\ & (\text{если } a^2+b^2>1 \text{ и } ab>0),\end{cases}$$

$$\begin{array}{l}\arcsin a -\\ -\arcsin b\end{array} = \begin{cases} \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right) & (\text{если } a^2+b^2<1, \\ & \text{а также если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab>0), \\ \pm\left[\pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right)\right] & \\ & (\text{если } a^2+b^2>1, \text{ но } ab<0),\end{cases}$$

В обеих последних формулах перед каждой квадратной скобкой нужно взять +, если a положительно, и −, если a отрицательно.

§ 26. О составлении таблиц тригонометрических функций

Дуга окружности ($\overset{\frown}{MAM_1}$, рис. 230) всегда длиннее стягивающей ее хорды (MPM_1), так что $\frac{\overset{\frown}{MAM_1}}{MPM_1} > 1$. Однако чем меньше центральный угол MOM_1, тем меньше отношение $\frac{\overset{\frown}{MAM_1}}{MPM_1}$ отличается от единицы, т. е. тем меньшую ошибку мы совершим, считая дугу и ее хорду равными. Так, при центральном угле 10° дуга MM_1 составляет $0{,}174533\ r$ (r — радиус окружности), а ее хорда $0{,}174312\, r$

$$\left(\frac{0{,}174533\ r}{0{,}174312\ r} \approx 1{,}001\right);$$

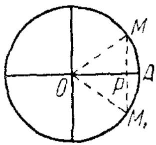


Рис. 230.

приняв хорду равной дуге, мы сделаем ошибку в $0{,}0002\, r$, что составит всего около одной десятой процента.

При угле в 2° относительная ошибка будет уже примерно в 10 раз меньше, именно, дуга равна $0{,}034907\, r$; хорда равна $0{,}034904\, r$. Отношение их $\frac{0{,}034907\ r}{0{,}034904\ r} \approx 1{,}0001$.

Приняв дугу равной хорде, мы делаем ошибку около сотой процента.

С другой стороны, отношение дуги $\overset{\frown}{MAM_1}$ к хорде MPM_1 в точности равно отношению радианной меры угла MOA (составляющего половину угла MOM_1) к его синусу. В самом деле, $\overset{\frown}{MAM_1} : MPM_1 = 2\overset{\frown}{MA} : 2MP = \overset{\frown}{MA} : MP = \frac{\overset{\frown}{MA}}{R} : \frac{MP}{R}$, но $\frac{\overset{\frown}{MA}}{R}$ есть радианная мера угла MOA (§ 3), а $\frac{MP}{R}$ есть синус того же угла.

Значит, приняв за $\sin\alpha$ величину самого угла α (в радианной мере), мы сделаем небольшую ошибку, если угол α невелик. Взяв достаточно малый угол, можно найти синус этого угла с нужной степенью точности. После этого можно составить и всю таблицу тригонометрических функций. Пусть мы нашли, например, $\sin 30'$. Тогда по формуле $\cos 30' = \sqrt{1 - \sin^2 30'}$ мы найдем и косинус этого угла; затем найдутся $\operatorname{tg} 30'$, $\operatorname{ctg} 30'$ и т. д. по формулам стр. 360. Далее, формулы $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ позволят найти $\sin(2 \times 30') = \sin 1°$ и $\cos 1°$. Потом по формулам сложения (§ 17) вычислим $\sin(1° + 30') = \sin 1°30'$ и $\cos(1° + 30') = \cos 1°30'$. Теперь, зная синус и косинус углов $1°30'$ и $30'$, найдем $\sin 2°$, $\cos 2°$ и т. д.

Так можно составить таблицы тригонометрических функций (пользуясь этим способом, нужно сначала найти с достаточной точностью число π — иначе не найдем радианную меру угла). Но выкладки будут чрезвычайно громоздкими. До 18 века составители таблиц (V, 2) пользовались почти столь же сложными расчетами. В настоящее время существуют гораздо более быстрые приемы; они основаны на методах высшей математики.

§ 27. Тригонометрические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком тригонометрической функции [1]), называется *тригонометрическим*.

---

[1]) Некоторые авторы понимают термин «тригонометрическое уравнение» в более узком смысле, требуя, чтобы неизвестная величина содержалась *только* под знаками тригонометрических функций. В таком случае уравнение примера 3 не будет тригонометрическим. Однако, как бы ни понимать термин «тригонометрическое уравнение», рассмотрение уравнений, где неизвестная величина содержится не только под знаками тригонометрических функций, но и в других сочетаниях, полезно во многих отношениях.

Пример 1. Уравнение $\sin y = \frac{1}{2}$ тригонометрическое. Его корни: $y = 30°$, $y = 180° - 30° = 150°$, $y = 2 \cdot 180° + 30° = 390°$; $y = 3 \cdot 180° - 30° = 510°$ и т. д., а также $y = -180° - 30° = -210°$; $y = -2 \cdot 180° + 30° = -330°$ и т. д.

Общее решение (т. е. совокупность *всех* корней) можно записать так [ср. V, 24, формула (1)]:

$$y = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30°,$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Рассмотрим одно из решений, например $y = 30°$. Его можно записать также $y = 1800'$, или $y = 108\,000''$, или $y = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}5236$ (подразумевая наименование «радианов»). Таким образом, в уравнении $\sin y = \frac{1}{2}$ неизвестное y есть величина *угла*, а не его числовой меры. Числовая же мера зависит от выбора единицы измерения углов (градус, минута, радиан и т. д.).

Можно принимать за неизвестную величину также и числовую меру угла; тогда необходимо указать, в каких единицах измеряются углы (см. пример 2).

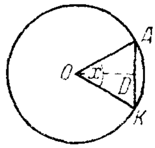


Рис. 231.

Пример 2. Хорда AK (рис. 231) равна радиусу окружности $R = OA$. Сколько градусов содержит центральный угол AOK? Здесь искомой величиной является *число*; обозначим его буквой x; тогда величина угла AOK есть $x°$ ($\angle AOK = x°$). Построив биссектрису OD угла AOK, имеем $\angle AOD = \left(\frac{x}{2}\right)°$. Так как $AK = 2AD = 2OA \sin \angle AOD = 2R \sin \left(\frac{x}{2}\right)°$, а по условию $AK = R$, то получаем уравнение $2R \sin \left(\frac{x}{2}\right)° = R$, т. е.

$$\sin \left(\frac{x}{2}\right)° = \frac{1}{2}.$$

Одно из решений этого уравнения есть $x = 60$.

В школьных занятиях обычно решают такие задачи, где оба способа составления тригонометрического уравнения одинаково пригодны, и предпочтительно пользуются первым способом. Однако на практике часто встречаются задачи, где первый способ непригоден (см. пример 3).

Пример 3. Дуга окружности AK (рис. 231) превосходит стягивающую ее хорду в $\frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472$ раза. Найти центральный угол AOK.

Применим второй способ. Обозначим через x градусную меру искомого угла (т. е. x есть некоторое *число*).

Как в примере 2, находим $AK = 2R \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$. Градусная мера дуги $\smile{AK}$ тоже равна x, т. е. длина дуги $\smile{AK}$ составляет $\frac{x}{360}$ от длины окружности $2\pi R$. Значит,

$$\smile{AK} = \frac{x}{360} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R x}{180}.$$

По условию $\smile{AK} : AK = \frac{\pi}{3}$. Получаем уравнение

$$\frac{\pi R x}{180} : 2R \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ = \frac{\pi}{3},$$

т. е.

$$x : \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ = 120. \tag{1}$$

Это уравнение имеет (единственное) решение $x = 60$; т. е. искомый *угол* AOK равен 60°.

Если бы за неизвестное x мы приняли меру угла AOK *в минутах*, мы получили бы уравнение

$$x : \sin\left(\frac{x}{2}\right)' = 7200 \tag{2}$$

(корень его есть $x = 3600$, т. е. $\angle AOK = 3600'$).

Таким образом, приняв иную единицу измерения угла, мы получаем существенно иное уравнение. Выходит, что для рассматриваемой задачи нельзя составить такого уравнения, где бы буква x обозначала величину самого угла, а не его числовой меры.

Замечание. Если через x обозначить радианную меру угла AOK, мы получим уравнение

$$x : \sin\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi \tag{3}$$

$\left(\text{корень его есть } x = \frac{\pi}{3}\right)$.

По внешнему виду этого уравнения можно подумать, что буквой x обозначается сам искомый угол AOK, а не его числовая мера. На самом деле здесь x есть число — радианная мера угла AOK, ибо уравнение (3) есть лишь сокращенная запись уравнения $x : \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ рад. $= \frac{2}{3}\pi$. Подобным же образом можно было бы вместо уравнения (1) условно написать:

$$x:\ \sin\frac{x}{2}=120.$$

§ 28. Приемы решения тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений стараются найти значения какой-либо тригонометрической функции неизвестной величины. Отсюда с помощью таблиц можно найти значения самой неизвестной величины (в общем случае приближенные). Для записи общего решения служат формулы § 24.

Одно и то же уравнение можно решать различными приемами. При этом могут оказаться полезными формулы § 19 и в особенности §§ 17 и 18.

Подвергая тригонометрическое уравнение тому или иному преобразованию, нужно заботиться, чтобы преобразованное уравнение было равносильно исходному. Впрочем, иногда целесообразно совершать и такие преобразования, при которых равносильность нельзя заранее гарантировать. Но тогда в случае возможности появления лишних корней (например, при возведении обеих частей уравнения в квадрат; см. примеры 5 и 6) необходимо *проверить* все найденные решения. В случае возможности потери корней нужно установить, какие именно корни могут пропасть и действительно ли они пропадают.

Впрочем, опасности потерять корни часто легко избежать. Покажем это на примере. Пусть дано уравнение $\operatorname{tg} x=2\sin x$. Запишем его в виде $\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x$. Если разделить обе части на $\sin x$, мы получим уравнение $\frac{1}{\cos x}=2$, не равносильное данному: будут потеряны корни уравнения $\sin x=0$. Но вместо этого можно поступить следующим образом. Перенесем $2\sin x$ влево и вынесем за скобку $\sin x$. Мы получим равносильное уравнение $\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\right)=0$. Оно удовлетворяется лишь в двух случаях: 1) если $\sin x=0$, 2) если $\frac{1}{\cos x}=2$, т. е. $\cos x=\frac{1}{2}$. В первом случае $x=k\pi$; во втором $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. Мы получили все корни.

Замечание. Приравнивая нулю один из сомножителей, нужно убедиться, что при этом другой сомножитель *не обращается в бесконечность.* В нашем примере так и есть. При $\sin x = 0$ имеем $\cos x = \pm 1$, так что $\frac{1}{\cos x} - 2$ равно -1 или -3. При $\cos x = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Если же второй сомножитель обращается в бесконечность, то результат, как правило, будет неверен. Пусть, например, дано уравнение $\sin x = 0$. Его можно записать в равносильном виде $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0$, но нельзя положить $\cos x = 0$ (при $\cos x = 0$ уравнение $\sin x = 0$ заведомо не удовлетворяется). Источник ошибки заключается в том, что при $\cos x = 0$ функция $\operatorname{tg} x$ обращается в бесконечность $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}\right)$.

Простейший по идее (но не всегда кратчайший) способ решения тригонометрического уравнения состоит в том, что все тригонометрические функции, входящие в уравнение, выражаются через одну и ту же функцию одной и той же величины, например через $\sin x$, или через $\operatorname{tg} x$, или через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и т. д. (таблица на стр. 360 и формулы для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ § 21). Удачный выбор этой функции часто сокращает вычисления.

Пример 1. $3 + 2\cos\alpha = 4\sin^2\alpha$.

Здесь удобно выразить $\sin^2\alpha$ через $\cos\alpha$. Имеем $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. Получаем равносильное уравнение

$$3 + 2\cos\alpha = 4(1 - \cos^2\alpha) \quad \text{или} \quad 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0.$$

Это уравнение — квадратное относительно $\cos\alpha$. Находим два значения $\cos\alpha$:

$$(\cos\alpha)_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 0{,}3090; \qquad (\cos\alpha)_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} =$$
$= -0{,}8090$, откуда $\alpha = 360°k \pm 72°00'$ и $\alpha = 360°k \pm 144°00'$.

Пример 2. $\frac{3}{\cos^2 x} = 8\operatorname{tg} x - 2$.

Здесь удобно выразить $\cos^2 x$ через $\operatorname{tg} x$. Имеем $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Получаем равносильное уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5 = 0.$$

Отсюда $(\operatorname{tg} x)_1 = 1$; $(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{5}{3}$. Уравнение имеет решения: $x = 180° k + 45°$ и $x = 180° k + 59°02'$ (первая формула — точная, вторая — приближенная).

Пример 3. $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$.

Здесь проще всего разделить на $\cos^2 x$. Получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 6 = 0.$$

При делении на $\cos x$ мы не теряем корней. Действительно, подставив $\cos x = 0$ в данное уравнение, найдем $\sin x = 0$, а равенства $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ несовместны.

Из уравнения $\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 6 = 0$ находим $(\operatorname{tg} x)_1 = 6$ и $(\operatorname{tg} x)_2 = -1$. Корни будут $x = 80°32' + 180° k$ и $x = -45° + 180° k$.

Пример 4. $2 \sin^2 x + 14 \sin x \cos x + 50 \cos^2 x = 26$.

Здесь нецелесообразно выражать $\cos x$ через $\sin x$ или наоборот, так как во втором члене появится иррациональность. Ее можно уничтожить, уединив этот член и возведя уравнение в квадрат. Но это сложно; к тому же могут появиться лишние решения. Будет лучше выразить $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} x$. Имеем $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$, $\cos x = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$.

В этих формулах знаки берутся либо оба верхние, либо оба нижние (так как $\sin x : \cos x$ должно равняться $\operatorname{tg} x$, а не $-\operatorname{tg} x$). Получаем равносильное уравнение

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x + 14 \operatorname{tg} x + 50}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 26.$$

Освободимся от знаменателя. Лишних корней не получится, так как $1 + \operatorname{tg}^2 x$ не может равняться нулю. После приведения подобных членов получили равносильное уравнение [1])

$$24 \operatorname{tg}^2 x - 14 \operatorname{tg} x - 24 = 0.$$

Отсюда $(\operatorname{tg} x)_1 = \frac{4}{3}$; $(\operatorname{tg} x)_2 = -\frac{3}{4}$.

Решения будут: $x = 53°07' + 180° k$; $x = -36°52' + 180° k$.

Пример 5.

$$\sin x + 7 \cos x = 5. \qquad (1)$$

Выразим $\sin x$ через $\cos x$. Получим:

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x} + 7 \cos x = 5 \qquad (2)$$

---

[1]) Это уравнение можно короче получить следующим искусственным приемом: так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то правую часть данного уравнения можно записать в виде $26(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Затем переносим все члены влево и делим на $\cos^2 x$.

или

$$\pm \sqrt{1-\cos^2 x} = 5 - 7\cos x.$$

Если бы были известны значения $\cos x$, то мы знали бы, какой знак взять перед радикалом (плюс, если правая часть *положительна, минус — если отрицательна*). Не зная корней уравнения (1), мы вынуждены сохранить оба знака. Поэтому уравнение (2) не равносильно (1). Мы ввели лишние корни. Возводя обе части (2) в квадрат и приводя подобные члены, получаем уравнение

$$50\cos^2 x - 70\cos x + 24 = 0, \qquad (3)$$

равносильное уравнению (2), но не уравнению (1).

Находим $(\cos x)_1 = 0{,}8$; $(\cos x)_2 = 0{,}6$.

Отсюда $x = \pm 36°52' + 360° k$ и $x = \pm 53°07' + 360° k$.

Проверим полученные корни. Подставляя $\cos x = 0{,}8$ в (1), получаем $\sin x = 5 - 7\cos x = 5 - 5{,}6 = -0{,}6$. Значит, корни $x = +36°52' + 360° k$ — лишние, так как синус этих углов (они принадлежат первой четверти) равен $+0{,}6$. Корни же $-36°52' + 360° k$ принадлежат и уравнению (1), ибо синус этих углов равен $-0{,}6$.

Подставим теперь в уравнение (1) значение $\cos x = 0{,}6$. Получим $\sin x = 0{,}8$. Отсюда заключаем, что корни $x = +53°07' + 360° k$ принадлежат и уравнению (1) (синус этих углов равен 0,8), а корни $x = -53°07' + 360° k$ — лишние (синус этих углов равен $-0{,}8$).

Решения уравнения *(1) будут* [1])

$$x = -36°52' + 360° k \text{ и } x = 53°07' + 360° k.$$

Пример 6. Уравнение, рассмотренное в примере 5, есть частный вид уравнения $a\sin x + b\cos x = c$. Все уравнения этого *общего вида можно* решать указанным способом. Покажем еще два способа на том же примере

$$\sin x + 7\cos x = 5. \qquad (1)$$

Первый способ. Возводим в квадрат [при этом вводятся лишние корни [2])]. Получаем:

$$\sin^2 x + 14\sin x\cos x + 49\cos^2 x = 25.$$

Применив один из приемов, указанных в примере 4, получим уравнение $24\,\mathrm{tg}^2 x - 14\,\mathrm{tg}\, x - 24 = 0$; это же

[1]) Уравнение (1) можно записать в равносильном виде $\sin x = 5 - 7\cos x$. Возводя в квадрат, получаем $\sin^2 x = (5 - 7\cos x)^2$; но это уравнение не равносильно (1), так как оно получилось бы и из уравнения $-\sin x = 5 - 7\cos x$. Заменив $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, получим снова *(3)*, и дальнейшее решение совпадает с изложенным в тексте.

[2]) См. предыдущую сноску.

уравнение мы получили в примере 4. Снова найдем $(\operatorname{tg} x)_1 = \frac{4}{3}$; $(\operatorname{tg} x)_2 = -\frac{3}{4}$. Однако теперь из корней $x = 53°07' + 180° k$ и $x = -36°52' + 180° k$ нужно устранить лишние. Если $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$, то имеем либо $\sin x = 0{,}8$; $\cos x = 0{,}6$, либо $\sin x = -0{,}8$; $\cos x = -0{,}6$. Подстановкой в (1) убеждаемся, что годится только первая пара значений т. е. угол x принадлежит первой четверти. Значит, среди корней $x = 53°07' + 180° k$ годятся только те, которые получаются при четных значениях k. Полагая $k = 2k'$, получаем $x = 53°07' + 360° k'$. Так же найдем, что из корней $x = -36°52' + 180° k$ годятся только те, для которых k — четное число, т. е.

$$x = -36°52' + 360° k'.$$

Второй способ. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (формулы § 21). После упрощений получаем равносильное уравнение $12 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 = 0$, откуда

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)_1 = \frac{1}{2}; \quad \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)_2 = -\frac{1}{3}.$$

Находим $\frac{x}{2} \approx 26°34' + 180° k$ и $\frac{x}{2} \approx -18°26' + 180° k$. Корни будут $x \approx 53°08' + 360° k$ и $x \approx -36°52' + 360° k$. Преимущество этого способа в том, что он не вводит лишних корней.

Замечание. Второй способ обладает большой общностью. Когда тригонометрическое уравнение приводится к такому виду, что в него входят только тригонометрические функции одного и того же угла, то все эти функции можно с помощью формул § 21 выразить через тангенс половинного угла. Вычисления при этом способе оказываются часто более трудоемкими, чем при других, но зато мы избавляемся от поисков искусственных приемов и во многих случаях избегаем появления лишних корней.

VI. ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ

§ 1. Постоянные и переменные величины

Применение математики к изучению законов природы и к использованию их в технике заставило ввести в математику понятие переменной величины и, в противоположность ей, понятие постоянной величины. *Переменная величина* — это такая величина, которая в условиях данного вопроса может принимать различные значения. *Постоянная величина* — это такая, которая в условиях данного вопроса сохраняет неизменное значение. Одна и та же величина в одном вопросе может быть постоянной, в другом — переменной величиной.

Пример. Температура T кипения воды в большинстве физических вопросов есть величина постоянная ($T = 100° C$). Однако в тех вопросах, где нужно считаться с изменением атмосферного давления, T есть величина переменная.

Различение постоянных и переменных величин особенно часто применяется в высшей математике; в элементарной математике основную роль играет разделение величин на известные и неизвестные. Последнее сохраняется и в высшей математике, но не играет там основной роли.

Чаще всего переменные величины обозначаются последними буквами латинского алфавита $x, y, z, \dots$, а постоянные — первыми $a, b, c, \dots$

§ 2. Функциональная зависимость между двумя переменными

Говорят, что две переменные величины x, y связаны *функциональной зависимостью*, если каждому значению, которое может принять одна из них, соответствует одно или несколько определенных значений другой.

Пример 1. Температура T кипения воды и атмосферное давление p связаны функциональной зависимостью, ибо каждому значению T соответствует одно определенное значение p и обратно. Так, если $T = 100°$ С, то p непременно равно 760 *мм* ртутного столба; если $T = 70°$ С, то $p = 234$ *мм* и т. д. Напротив, атмосферное давление p и относительная влажность воздуха x (рассматриваемые как переменные величины) не связаны функциональной зависимостью: если известно, что $x = 90\%$, то о величине p нельзя еще сказать ничего определенного.

Пример 2. Площадь равностороннего треугольника S и его периметр p связаны функциональной зависимостью. Формула $S = (\sqrt{3} : 36) p^2$ представляет эту зависимость.

Если желательно подчеркнуть, что в данном вопросе значения переменной y должны отыскиваться по заданным значениям переменной x, то последняя (x) называется *независимой переменной* или *аргументом*, а первая (y) — *зависимой переменной* или *функцией*.

Пример 3. Если по величине периметра p равностороннего треугольника мы хотим судить о площади его S (см. пример 2), то p есть аргумент (независимая переменная), а S — функция (зависимая переменная).

Чаще всего независимая переменная обозначается буквой x.

Если каждому значению аргумента x соответствует только одно значение функции y, то функция называется *однозначной*, если два или более — *многозначной* (двузначной, трехзначной и т. д.).

Пример 4. Тело брошено кверху; s — высота его над землей, t — время, протекшее от момента бросания. Величина s есть однозначная функция от t, так как в каждый данный момент высота тела — вполне определенная величина. Величина t — двузначная функция от s, так как тело находится на данной высоте s дважды — один раз при полете вверх, другой раз при падении вниз.

Формула $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, связывающая переменные s, t (начальная скорость v_0 и ускорение земного тяготения g — в данном случае постоянные величины), показывает, что при данном t имеем одно значение s, а при данном s — два значения t, определяемые из квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t + s = 0.$$

§ 3. Обратная функция

Для характеристики функции совершенно не существенно, какой буквой обозначается сама функция и ее аргумент; так, если имеем $y=x^2$ и $u=v^2$, то y есть такая же функция от x, как u от v; иначе говоря, x^2 и v^2 — это одна и та же функция, хотя аргумент ее обозначен неодинаково.

Если в данной функциональной зависимости аргумент и функцию поменять ролями, мы получаем новую функцию, называемую *обратной* по отношению к исходной.

Пример 1. Пусть имеем функцию u от аргумента v

$$u=v^2.$$

Если поменять ролями аргумент и функцию, величина v будет функцией от u и представится формулой $v=\sqrt{u}$. Если аргумент в обоих случаях обозначить одной и той же буквой x, то исходная функция есть x^2, а обратная ей $\sqrt{x}$.

Пример 2. Функцией, обратной $\sin x$, является $\arcsin x$. Действительно, если $y=\sin x$, то $x=\arcsin y$ (V, 24).

О графике обратной функции см. § 8, п. 7.

§ 4. Изображение функции формулой и таблицей

Многие функциональные зависимости могут быть (точно или приближенно) представлены простыми формулами. Например, зависимость между площадью круга S и радиусом r представляется формулой $S=\pi r^2$; зависимость между высотой s брошенного тела и временем t, протекшим от начала бросания, — формулой $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$; последняя по существу — приближенная формула, так как она не учитывает ни сопротивления воздуха, ни ослабления силы земного притяжения с увеличением высоты.

Часто функциональную зависимость не удается представить в виде формулы или, если удается, формула оказывается неудобной для вычислений. В этих случаях пользуются иными способами, чаще всего *табличным* и *графическим* (см. VI, 7).

Пример. Функциональную зависимость между давлением p и температурой кипения воды T (ср. VI, 2, пример 1) не удается представить одной формулой, которая с нужной степенью точности охватывала бы все практически важные случаи. Эта зависимость представляется таблицей, выдержка из которой имеет вид:

p мм	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T° C	75,8	79,6	83,0	85,8	88,5	91,2	93,5	95,7	97,6

Для удобства вычислений значения одной переменной большей частью берутся через равные промежутки; эта переменная называется *аргументом* таблицы.

Всех значений аргумента никакая таблица, конечно, не может содержать, но практически пригодная таблица должна содержать столько значений аргумента, чтобы для остальных значение функции можно было получить с нужной степенью точности при помощи интерполяции (см. II, 50).

§ 5. Обозначение функции

Пусть известно, что переменная y есть некоторая функция переменной x. Как задана эта функция — формулой, таблицей или как-либо иначе, — безразлично; эта функция может быть даже вовсе не известной, должен быть установлен лишь самый факт функциональной зависимости (VI, 2). Этот факт отмечается записью $y=f(x)$.

Буква f (начальная буква латинского слова functio — функция), разумеется, не обозначает какой-либо величины, так же как буквы lg, tg и т. д. в записях $\lg x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. Записи $y=\lg x$; $y=\operatorname{tg} x$ и т. д. представляют вполне определенные функциональные зависимости y от x; запись $y=f(x)$ представляет любую функциональную зависимость.

Если хотят подчеркнуть, что функциональная зависимость z от t отлична от функциональной зависимости y от x, то ее обозначают иной буквой, например F, и пишут: $z=F(t)$; $y=f(x)$.

Если же хотят выразить, что функциональная зависимость z от t та же, что функциональная зависимость y от x, то ее обозначают той же самой буквой f, т. е. пишут: $z=f(t)$; $y=f(x)$.

Если найдено или дано выражение y через x, то это выражение соединяют с $f(x)$ знаком равенства.

Примеры. 1) Если известно, что $y = x^2$, то пишут $f(x) = x^2$.

2) Если известно, что $y = \sin x$, то можем написать $f(x) = \sin x$.

3) Если $f(x) = \lg x$, то символ $f(y)$ означает $\lg y$.

4) Если $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ и $F(x) = 3x$, то можем написать $F(x) f(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$; $\frac{F(y)}{f(z)} = \frac{3y}{\sqrt{1+z^2}}$.

§ 6. Координаты

Две взаимно перпендикулярные прямые XX' и YY' (рис. 232) образуют *прямоугольную систему координат*. Прямые XX' и YY' называются *осями координат*, одна из них XX' (обычно изображаемая горизонтально) называется *осью абсцисс*; другая YY' — *осью ординат*; точка O их пересечения — *началом координат*. На каждой из осей выбирается по произволу масштаб.

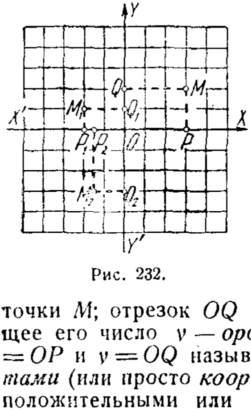


Рис. 232.

Взяв произвольную точку M на плоскости, в которой расположены оси, найдем ее проекции P и Q на координатные оси. Отрезок OP на оси абсцисс, а также число x, измеряющее его в избранном масштабе, называется *абсциссой* точки M; отрезок OQ на оси ординат, а также измеряющее его число y — *ординатой* точки M. Величины $x = OP$ и $y = OQ$ называются *прямоугольными координатами* (или просто *координатами*) точки M. Они считаются положительными или отрицательными в соответствии с заранее устанавливаемыми направлениями положительных отрезков на каждой из осей (обычно на оси абсцисс положительные отрезки откладываются вправо, а на оси ординат вверх).

На рис. 232 (где масштабы на обеих осях одинаковы) точка M имеет абсциссу $x = 3$ и ординату $y = 2$; точка M_1 — абсциссу $x_1 = -2$ и ординату $y_1 = 1$. Сокращенно это записывается так: M (3; 2); M_1 (−2; 1). Точно так же M_2 (−1,5; −3).

Каждой точке плоскости соответствует одна пара чисел x, y. Каждой паре (действительных) чисел x, y соответствует одна точка M. Прямоугольная система координат часто называется декартовой по имени французского философа и математика Декарта, широко применившего координаты к исследованию многих геометрических вопросов. Это название, однако, неправильно [1]).

§ 7. Графическое изображение функций

Чтобы графически изобразить заданную функциональную зависимость, на оси абсцисс отмечаем ряд значений x_1, x_2, x_3, ... одной из переменных x (обычно аргумента) и строим ординаты y_1, y_2, y_3, ..., представляющие соответствующие значения другой переменной y (функции); получаем ряд точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, ... Соединяя их на глаз плавной кривой линией, получаем график данной функциональной зависимости. Преимуществом графического изображения в сравнении с табличным являются его наглядность и легкая обозримость; недостатком — малая степень точности. Большое практическое значение имеет удачный выбор масштабов.

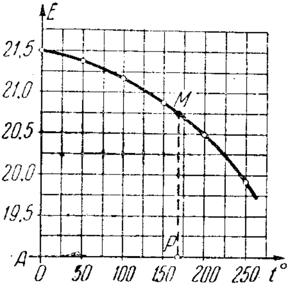


Рис. 233.

На рис. 233 графически изображена функциональная зависимость между модулем упругости E кованого железа (в $т/см^2$) и температурой железа t. Масштабы абсцисс (t) и ординат (E) показаны числовыми пометками (Начало координат и ось абсцисс на чертеже не показаны, чтобы не увеличивать без нужды размера графика.)

---

[1]) Декарт пользовался не двумя осями, а одной, на которой откладывались абсциссы; ординаты определялись как расстояния точек плоскости от оси абсцисс; эти расстояния Декарт отсчитывал по любому заранее выбранному направлению, а не обязательно по перпендикуляру. Как абсциссы, так и ординаты у Декарта были всегда величинами положительными независимо от направления соответствующих отрезков. В большинстве учебников различение направлений на осях знаками + и — ошибочно приписывается Декарту, тогда как оно было введено лишь его учениками.

График рис. 233 составлен на основании следующей таблицы:

$t°$ C	0	50	100	150	200	250
E $m/см^2$	21,5	21,4	21,2	20,9	20,5	19,9

По графику можно найти (приблизительно) значение функции и для тех значений аргумента, которые в таблице не помещены. Например, пусть требуется найти значение E при $t = 170°$. Отложив на оси абсцисс (или на прямой At, ей параллельной) абсциссу $t = AP = 170$ и восставив перпендикуляр PM, прочтем ординату $E = PM = 20{,}75$. Чтение чрезвычайно облегчается, если график нанесен на графленую (например, миллиметровую) бумагу. Нахождение промежуточных значений функции по ее графику называется *графической интерполяцией*.

На практике всякий график строится «по точкам», т. е. от руки проводится плавная линия, соединяющая ряд отдельных точек M_1, M_2, ... При этом теоретически никогда не исключается возможность, что промежуточные точки, еще не нанесенные на график, лежат очень далеко от проведенной плавной кривой. Ввиду этого теоретически *следует определить график как геометрическое место* (IV, Б, 14) *точек $M(x, y)$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.*

§ 8. Простейшие функции и их графики

1. Пропорциональные величины. Если переменные величины y и x (прямо) пропорциональны (II, 49), то функциональная зависимость между ними выражается уравнением

$$y = mx, \tag{1}$$

где m есть некоторая постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*). График прямой пропорциональности[1]) есть прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью абсцисс угол α, тангенс которого равен постоянной m; $\operatorname{tg}\alpha = m$. Поэтому коэффициент пропорциональности m называется также *угловым коэф-*

---

[1]) Здесь и в дальнейшем предполагается, что масштабы на обеих осях одинаковы.

фициентом. На рис. 234 показаны графики функции $y=mx$ при $m=\frac{1}{2}$, $m=1$, $m=2$, $m=-\frac{3}{4}$.

Замечание. Для определения угла α между осью абсцисс и графиком направление на оси абсцисс берется положительное; на графике же берется любое направление (величина $\operatorname{tg}\alpha$ от выбора направления не зависит).

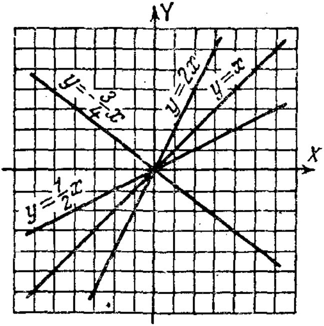


Рис. 234.

2. Линейная функция. Если переменные величины x, y связаны уравнением первой степени

$$Ax+By=C \qquad (2)$$

(по крайней мере одно из чисел A, B не равно нулю), то график функциональной зависимости есть прямая линия. Когда $C=0$, она проходит через начало координат (ср. п. 1), в противном случае — не проходит.

Пусть ни A, ни B не равны нулю; тогда график пересекает обе оси координат, отсекая на оси абсцисс отрезок $a=\frac{C}{A}$, а на оси ординат отрезок $b=\frac{C}{B}$.

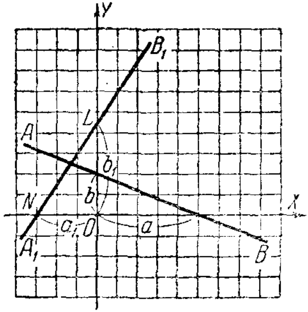


Рис. 235.

Примеры. График уравнения $2x+5y=10$ есть прямая AB (рис. 235); $a=\frac{10}{2}=5$; $b=\frac{10}{5}=2$. График уравнения $2y-3x=9$ есть прямая A_1B_1; здесь $a_1=\frac{9}{-3}=-3$; $b_1=\frac{9}{2}=4{,}5$.

Разрешив уравнение (2) относительно y, получим:

$$y=mx+b, \qquad (3)$$

где

$$m = -\frac{A}{B}; \; b = \frac{C}{B}.$$

Функция $y = mx + b$ называется *линейной функцией*. Ее график — прямая линия.

Пример. Уравнение $2y - 3x = 9$, разрешенное относительно y, примет вид $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ $\left(m = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2};\right.$ $\left.b = \frac{9}{2}\right)$. График функции $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ есть прямая линия A_1B_1 (рис. 235).

Прямая, служащая графиком функции $y = mx + b$, образует с (положительно направленной) осью абсцисс угол, тангенс которого равен m, и отсекает на оси ординат отрезок b. Постоянная величина m называется *угловым коэффициентом*.

Пример. Для прямой A_1B_1, служащей графиком функции $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$, имеем $\operatorname{tg} \angle XNB_1 = \frac{3}{2}$; $OL = \frac{9}{2}$.

Уравнение $y = mx$ (прямая пропорциональность; см. п. 1) есть частный вид уравнения $y = mx + b$ $(b = 0)$.

Уравнение $y = b$ есть тоже частный вид уравнения $y = mx + b$ $(m = 0)$. В этом случае величина y постоянна и, значит, от x не зависит. Тем не менее ее можно считать функцией переменной величины x. Ведь каждому значению x соответствует определенное значение y; только теперь это значение — одно и то же для всех значений x. Особенность функции $y = b$ $(y = 0 \cdot x + b)$ состоит в том, что теперь x не является функцией от y (ибо значениям y, не равным b, не соответствует никакое значение x). График функции $y = b$ есть прямая линия, параллельная оси абсцисс.

На рис. 236 линия PQ есть график уравнения $y = 6$, а P_1Q_1 — график уравнения $y = -4$.

Уравнение $y = b$ получается из уравнения (2), когда $A = 0$ $\left(b = \frac{C}{B}\right)$. Если же $B = 0$, то уравнение (2) можно представить в виде $x = a$ $\left(a = \frac{C}{A}\right)$, т. е. x — постоянная величина. Ее можно считать функцией переменной величины y (но y не будет функцией от a; см. выше).

График уравнения $x = a$ есть прямая линия, параллельная оси ординат. На рис. 237 прямая линия RS есть график уравнения $x = +4$, а R_1S_1 — график уравнения $x = -2$.

Ось абсцисс есть график уравнения $y=0$; ось ординат — график уравнения $x=0$.

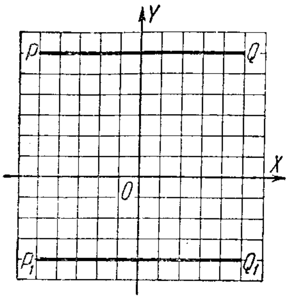


Рис. 236.

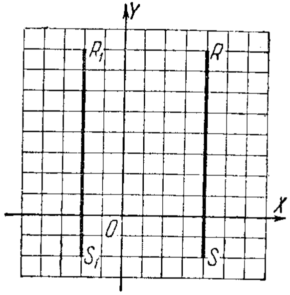


Рис. 237.

3. Обратная пропорциональность. Если величины x и y обратно пропорциональны (II, 49), то функциональная зависимость между ними выражается уравнением $y=\frac{c}{x}$, где c есть некоторая постоянная величина. График обратной пропорциональности есть кривая линия, состоящая из двух «ветвей»; например, функция $y=\frac{4}{x}$ изображается (рис. 238) кривой, ветви которой суть AB и $A'B'$. На рис. 238 изображены еще графики функции $y=\frac{c}{x}$, $c=1$ (пунктиром) и $c=-1$. Эти кривые называются

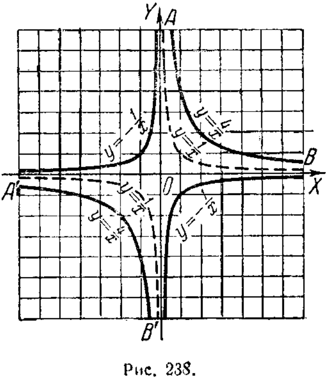


Рис. 238.

равносторонними гиперболами (их можно получить, пересекая конус с прямым углом при вершине плоскостями, параллельными оси; IV, В, 9).

4. Квадратичная функция. Функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

(a, b, c — постоянные величины; $a \neq 0$) называется *квадратичной*. В простейшем случае $y = ax^2$ ($b = c = 0$) график есть кривая линия, проходящая через начало координат.

На рис. 239 изображены графики функции $y = ax^2$:

$AOB\left(a = \frac{1}{2}\right)$; $COD\,(a = 1)$; $EOF\,(a = 2)$; $KOL\left(a = -\frac{1}{2}\right)$.

Кривая, служащая графиком функции $y = ax^2$, есть *парабола* (IV, В, 9). Каждая парабола имеет ось симметрии (OY

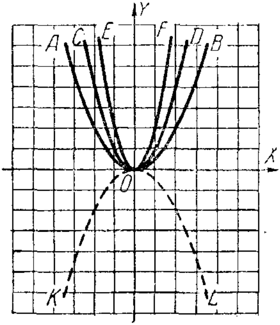


Рис. 239.

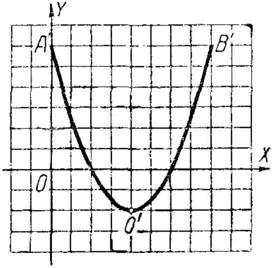


Рис. 240.

на рис. 239), называемую *осью параболы*. Точка O пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет ту же форму, что и график функции $y = ax^2$ (при том же значении a), т. е. также есть парабола. Ось этой параболы по-прежнему вертикальна, но вершина лежит не в начале координат, а в точке $\left(-\frac{b}{2a};\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Пример. График функции

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

$\left(a = \frac{1}{2};\ b = -4;\ c = 6\right)$ является (рис. 240) параболой $A'O'B'$, имеющей такую же форму, что и парабола $y = \frac{1}{2}x^2$

(AOB на рис. 239). Вершина лежит в точке $O'(4; -2)$ $\left(-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\cdot\frac{1}{2}}=4,\ c-\frac{b^2}{4a}=6-\frac{16}{4\cdot\frac{1}{2}}=-2\right)$.

5. Степенная функция. Функция $y=ax^n$ (a, n — постоянные величины) называется *степенной*. Функции $y=ax$, $y=ax^2$, $y=\frac{a}{x}$ (см. п. 1, 3, 4) — частные виды степенной функции ($n=1$, $n=2$, $n=-1$).

Так как нулевая степень всякого числа, не равного нулю, есть единица, то при $n=0$ степенная функция становится постоянной величиной [1]): $y=a$. В этом случае график есть прямая линия, параллельная оси абсцисс (см. п. 2).

Остальные случаи можно разбить на две группы: а) n — положительное число; б) n — отрицательное число.

а) На рис. 241 изображены графики функции $y=x^n$ при $n=0{,}1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ 3;\ 4;\ 10.$ Все они проходят через начало координат

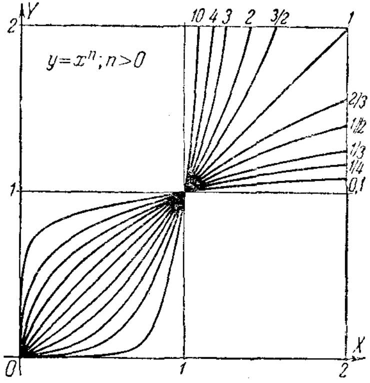


Рис. 241.

и через точку (1; 1). При $n=1$ имеем прямую — биссектрису угла XOY. При $n>1$ график идет сначала (между $x=0$ и $x=1$) ниже этой прямой, а затем (при $x>1$) выше ее; при $n<1$ — наоборот.

Мы ограничились случаем $a=1$, так как прочие случаи получаются простым изменением масштаба. Отрицательные значения x не взяты, так как при $x<0$ некоторые степенные функции с дробными показателями, например $y=x^{1/2}=\sqrt{x}$, теряют смысл. При целых показателях степенные функции имеют смысл и при $x<0$, но графики

[1]) Выражение 0^0 неопределенно; в данном случае, когда функция $y=ax^0$ для всех значений x, кроме нуля, равна a, мы уславливаемся, что и при $x=0$ величина y равна a.

их имеют различный вид в зависимости от того, четно n или нечетно.

В качестве типичных примеров на рис. 242 изображены графики функций $y=x^2$ и $y=x^3$. При четном n график симметричен (IV, B, 17) относительно оси ординат; при нечетном — относительно начала координат.

По аналогии с графиком функции $y=ax^2$ графики всех степенных функций $y=ax^n$ при положительном n называют *параболами n-го порядка* (или n-й степени).

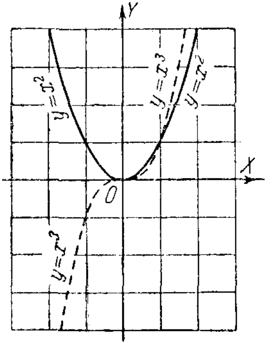


Рис. 242.

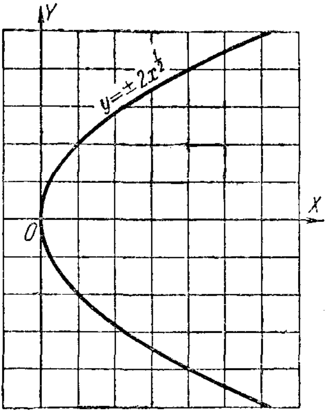


Рис. 243.

Так, график функции $y=ax^3$ (рис. 242) называется параболой 3-го порядка или *кубической*.

Замечание. Если n есть дробное число $\frac{p}{q}$ с четным знаменателем q и нечетным числителем p, то величина $x^n=\sqrt[q]{x^p}$ может иметь два знака $\left(\pm\sqrt[q]{x^p}\right)$, и у графика появляется еще одна часть снизу от оси абсцисс, симметричная с верхней половиной. На рис. 243 дан график двузначной функции $y=\pm 2x^{\frac{1}{2}}$, т. е. $x=\frac{1}{2}y^2$ (парабола с горизонтальной осью); на рис. 244 — график двузначной функции $y=\pm\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ (*полукубическая парабола* или *парабола Нейля*).

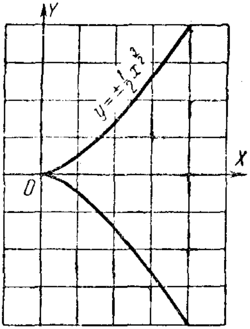


Рис. 244.

б) На рис. 245 изображены графики функций $y=x^n$ при $n=-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -3, -10$. Все эти графики проходят через точку (1; 1). В случае $n=-1$ имеем гиперболу (п. 3). При $n<-1$ график степенной функции располагается сначала (между $x=0$ и $x=1$) выше гиперболы, а затем (при $x>1$) ниже ее; при $n>-1$ наоборот. Относительно отрицательных значений x и дробных значений n можно повторить сказанное в пункте а).

Все графики рис. 245 неограниченно приближаются как к оси абсцисс, так и к оси ординат, не достигая ни

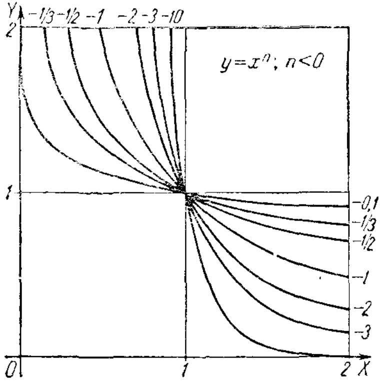


Рис. 245.

той, ни другой. Вследствие сходства с гиперболой эти графики называют *гиперболами n-го порядка*.

6. Показательная и логарифмическая функции. Функция $y = a^x$, где a — постоянное положительное число, называется *показательной*. Число a берется положительным потому, что при $a < 0$ величины $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$ и т. п. не были бы действительными. Аргумент x может принимать любые действительные значения (III, 61). Значения функции $y = a^x$ берутся только положительные. Так, для функции $y = 16^x$ при $x = \frac{1}{4}$ берется только значение $y = 2$, значение же -2 (и тем более мнимые значения $2i$ и $-2i$) не рассматривается.

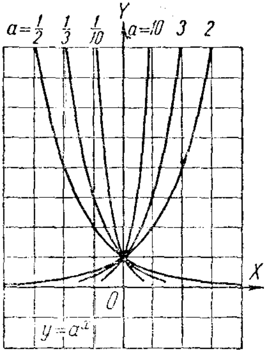


Рис. 246.

На рис. 246 изображены графики показательной функции при $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, 2, 3, 10$.

Все они проходят через точку (0; 1). (При $a = 1$ имеем прямую линию, параллельную оси абсцисс; функция a^x становится постоянной величиной.) При $a > 1$ график при движении вправо поднимается, при $a < 1$ — опускается. Все графики неограниченно приближаются к оси абсцисс, но не достигают ее. Графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, а также $y = 3^x$ и $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и вообще $y = a^x$ и $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ симметричны друг другу относительно оси ординат.

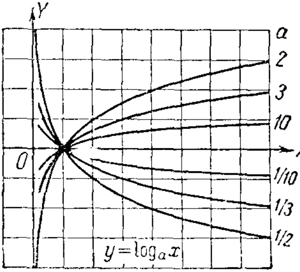


Рис. 247.

Функция $y = \log_a x$, где a — постоянное положительное число (не равное 1; см. III, 63, сноска [2]) на стр. 235), называется *логарифмической*.

Логарифмическая функция обратна показательной. График ее (рис 247) получается из графика показательной функции (при том же основании) перегибом чертежа по биссектрисе первого координатного угла Так же получается график всякой обратной функции.

График каждой логарифмической функции получается из графика каждой другой пропорциональным изменением ординаты (логарифмы чисел при разных основаниях пропорциональны; ср. III, 64).

7. Тригонометрические функции. Периодичность. Определение тригонометрических функций дано в V, 5 и V, 15.

Для построения графика какой-либо тригонометрической функции (например, синуса) переменного *угла* нужно на оси абсцисс задать отрезок, изображающий какой-либо определенный угол (например, 90°), а на оси ординат — отрезок, изображающий какое-либо число (например, 1). Об одинаковости масштабов на обеих осях речь может идти лишь только после того, как установлено, какой угол принимается за единицу измерения. Лишь тогда число x, измеряющее угол, и число y, дающее его синус, можно изобразить отрезками, пропорциональными этим числам (ср. V, 27).

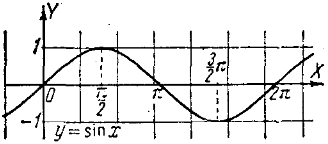


Рис. 248.

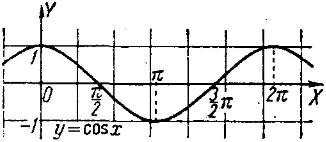


Рис. 249.

При построении графиков принято за единицу измерения угла брать радиан. Тогда функция $y=\sin x$ (под x подразумевается наименование «радианов») изображается графиком рис. 248 (масштабы на осях одинаковы). Если за единицу измерения угла принять полрадиана, то, сохраняя те же масштабы, придется график подвергнуть растяжению вдоль оси абсцисс в отношении 2 : 1.

Линия, являющаяся графиком функции $y=\sin x$, называется *синусоидой*.

График функции $y=\cos x$ изображен на рис. 249. Это — тоже синусоида; она получается из графика $y=\sin x$ смещением вдоль OX влево на отрезок $\frac{\pi}{2}$

При смещении графика синуса или косинуса на отрезок 2π (вправо или влево) он совмещается сам с собой.

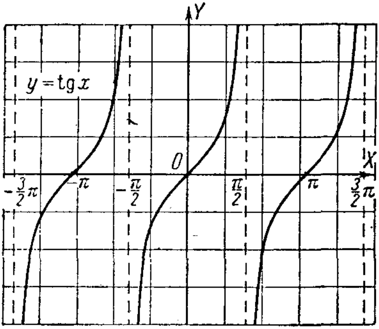


Рис. 250.

Если график некоторой функции $y = f(x)$ при смещении его на некоторый отрезок вдоль оси абсцисс совмещается сам с собой, то функция называется *периодической*; число p, измеряющее этот отрезок, называется *периодом* функции $f(x)$. Это словесное определение кратко выражается формулой

$$f(x+p)=f(x).$$

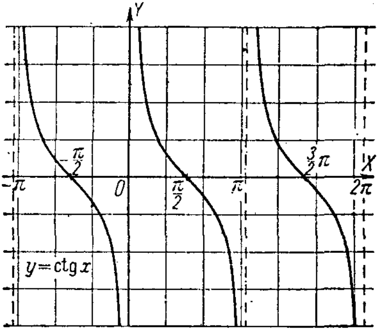


Рис. 251.

Если p есть период функции $f(x)$, то $2p$, $3p$, $-2p$, $-3p$ и т. д. — тоже периоды

Все тригонометрические функции имеют период 2π.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ имеют, сверх того, период π (так как

$$\operatorname{tg}(x \pm k\pi) = \operatorname{tg} x).$$

График $y = \operatorname{tg} x$ дан на рис. 250, график $y = \operatorname{ctg} x$ — на рис. 251. График тангенса неограниченно приближается к прямым, параллельным оси ординат и отстоящим от нее на расстоянии $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\frac{\pi}{2}$, $\pm 5\frac{\pi}{2}$ и т. д. (но не достигает этих прямых). Аналогичную роль для графика котангенса играют прямые, отстоящие от оси OY на $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ и т. д., и сама ось OY.

8. Обратные тригонометрические функции. Определения обратных тригонометрических функций были даны в V, 24 (ср. VI, 3). Здесь даны графики функций $y = \operatorname{Arc}\sin x$ (рис. 252), $y = \operatorname{Arc}\cos x$ (рис. 253), $y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ (рис. 254), $y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$ (рис. 255). Они получаются из графиков функций $y = \sin x$ и т. д. перегибом чертежа около биссектрисы первого координатного угла (ср. § 8, п. 5). Графики функций $y = \operatorname{Arc}\sin x$ и $y = \operatorname{Arc}\cos x$ целиком помещаются внутри вертикальной полосы, ограниченной прямыми $x = +1$ и $x = -1$ (эти функции при $|x| > 1$ не имеют действительных значений). Каждая вертикальная прямая, лежащая внутри упомянутой полосы, пересекает график бесчисленное множество раз. То же для

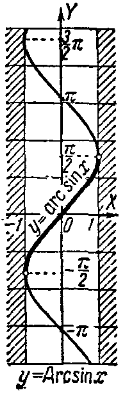


Рис. 252.

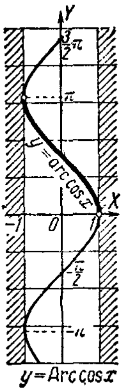


Рис. 253

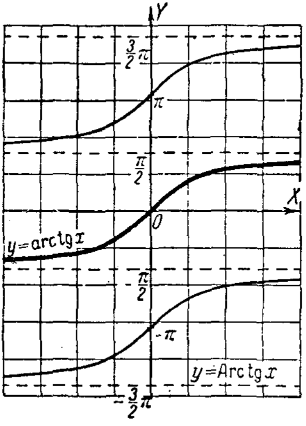


Рис. 254.

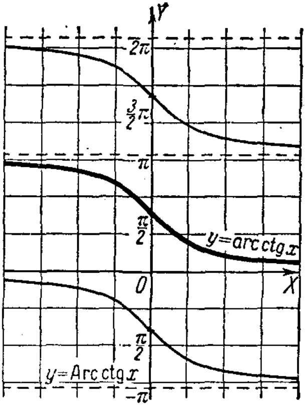


Рис. 255.

графиков $y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} x$ — только вертикальную прямую можно взять где угодно.

В этом сказывается многозначность обратных тригонометрических функций (V, 24). Те части графиков, которые соответствуют главным значениям, выделены на рис. 252—255 жирной линией.

§ 9. Графическое решение уравнений

Графическое изображение функций дает возможность легко отыскивать приближенное решение любого уравнения с одним неизвестным и системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Чтобы найти решение системы двух уравнений с двумя неизвестными x, y, мы каждое из уравнений рассматриваем как функциональную зависимость между переменными x, y и строим для этих двух зависимостей два графика. Координаты точек, общих двум графикам, дают искомые значения неизвестных x, y (корни данной системы уравнений).

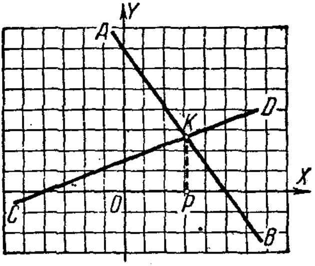


Рис. 256.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$7x + 5y = 35,$$
$$-3x + 8y = 12.$$

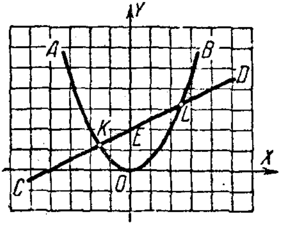


Рис. 257.

График каждого из этих уравнений — прямая линия. Отрезки, отсекаемые графиком первого уравнения на координатных осях, суть

$$a = \frac{35}{7} = 5; \quad b = \frac{35}{5} = 7$$

(VI, 8, п. 2). По этим отрезкам строим прямую AB (рис. 256). Так же найдем для графика второго уравнения $a = -4$; $b = 1{,}5$ и построим прямую CD [1]).

Координаты точки K пересечения графиков дадут искомые значения x, y. Значения координат прочитываем

[1]) Вместо нахождения отрезков a, b можно нанести на чертеж любые две точки прямой, для чего величине x дадим любые два значения и вычислим соответствующие значения y.

на глаз: $x\,(=OP)=3{,}1$, $y\,(=PK)=2{,}7$. Точные значения корней были бы $x=3\frac{7}{71}$; $y=2\frac{47}{71}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0$. Его можно графически решить как уравнение с одним неизвестным (см. ниже пример 4), но проще заменить системой уравнений

$$y=\frac{1}{2}x^2,\quad y=\frac{1}{2}x+2$$

и графически решить эту систему.

Первое уравнение графически изобразится (рис. 257) параболой AOB (VI, 8, п. 4), которую построим по точкам. График второго уравнения — прямая линия CD, отсекающая на оси ординат отрезок $b\,(=OE)=2$; угловой коэффициент ее $m\,(=\operatorname{tg}\angle DCX)=\frac{1}{2}$ (VI, 8, п. 2). В пересечении прямой CD с параболой AOB находим две точки K и L, абсциссы которых (прочитанные на глаз) $x_1=-1{,}6$ и $x_2=2{,}6$ дают приближенные значения корней данного уравнения. Точные значения корней были бы

$$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2};\quad x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

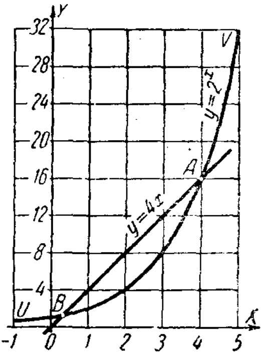


Рис. 258.

Пример 3. Решить уравнение $2^x=4x$. Это уравнение не приводится к алгебраическому. Один корень ($x=4$) легко подобрать. Чтобы отыскать другие корни (если они есть), лучше всего начать с графического решения. Заменяем данное уравнение системой $y=2^x$; $y=4x$. Строим (рис. 258) график показательной функции $y=2^x$ (по точкам, давая аргументу значения $x=-1, 0, 1, 2, 3$ и т. д.) и функции $y=4x$ (прямая линия). Ординаты растут здесь гораздо быстрее абсцисс; поэтому лучше выбрать на оси OX масштаб меньший, чем на OY (на рис. 258 он вчетверо меньше).

В пересечении находим две точки A и B. Из построения видно, что других общих точек графики не имеют.

Абсцисса точки A есть $x=4$; абсциссу точки B прочитываем на глаз $x \approx 0{,}3$.

Найденное решение можно уточнить вычислением. Пользуясь таблицами логарифмов, найдем значение 2^x при $x=0{,}3$. Получим 1,231. Это число несколько больше, чем $4x=1{,}200$ (на 0,031). Значит (см. график), число 0,3 меньше абсциссы точки B. Испытаем значение $x=0{,}35$. Получим $2^x=1{,}275$; $4x=1{,}400$. Теперь 2^x меньше, чем $4x$ (на 0,125). Значит, число 0,35 больше абсциссы точки B, так что истинное значение x лежит между 0,30 и 0,35 примерно в 4 раза ближе к первому значению, чем ко второму (так как 0,031 в 4 раза меньше, чем 0,125). Поэтому $x \approx 0{,}31$. Проверка дает $2^x=1{,}240$, $4x=1{,}240$. Впрочем, $x=0{,}31$ не есть точный корень. Если взять таблицы логарифмов с бо́льшим числом знаков, то между 2^x и $4x$ обнаружится различие в пятой значащей цифре. Тем же способом можно будет найти более точное значение корня.

Чтобы найти решение уравнения с одним неизвестным, можно, перенеся все члены в левую часть, представить его в виде $f(x)=0$. Строим график функции $y=f(x)$. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью абсцисс будут корнями данного уравнения

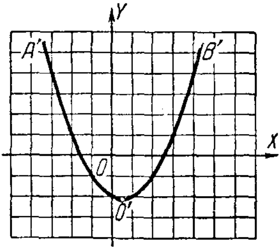


Рис. 259.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+2$. Переносим все члены в левую часть: $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0$. Строим график функции $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ (по точкам). Получим (рис. 259) параболу $A'O'B'$; форма ее та же, что в предыдущем примере; вершина лежит в точке $O'\left(\frac{1}{2};-2\frac{1}{8}\right)$ (см. VI, 8, п. 4). В пересечении графика с осью абсцисс находим две точки. Прочитывая на глаз их абсциссы, находим $x_1=-1{,}6$; $x_2=2{,}6$.

§ 10. Графическое решение неравенств

Графическое решение неравенств (как и уравнений) обладает не особенно большой точностью. Но наглядность и легкая обозримость, свойственная графическому методу, при решении неравенств (и особенно их систем) ценны еще больше, чем при решении уравнений. Способы решения — те же, что для уравнений (§ 9); только решения изображаются отрезками, а не точками.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2<0.$$

Строим (рис. 260) график функции $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ (ср. § 9, пример 4). По условию должны иметь $y<0$; значит, точки, соответствующие решению, должны лежать под осью абсцисс. График показывает, что геометрическое место этих точек есть дуга $KO'L$ параболы $A'O'B'$ (концы этой дуги K и L исключаются: для них $y=0$). Значениям x, удовлетворяющим данному неравенству, отвечают внутренние точки отрезка KL оси абсцисс. По графику прочитываем $-1{,}6<x<2{,}6$. Если желательно иметь точное решение, нужно найти абсциссы точек K и L вычислением, т. е. решить квадратное уравнение $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0$. Тогда найдем $\frac{1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Рис. 260.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2>0$.

Строится тот же график, что в примере 1. Теперь должны иметь $y>0$, т. е. точки должны лежать над осью абсцисс. Геометрическое место этих точек есть линии KA' и LB', неограниченно продолжаемые вверх (начала их K и L исключаются). Соответствующие точки оси абсцисс заполняют лучи KX' и LX (точки K и L исключаются). Данное неравенство справедливо: 1) при $x<-1{,}6$, 2) при $x>2{,}6$; точное решение: 1) $x<\frac{1-\sqrt{17}}{2}$; 2) $x>\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}x^2<\frac{1}{2}x+2.$$

Это неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2<0$, решенному в примере 1, но в данном виде его легче решить.

Строим (ср. § 9, пример 2) графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ (парабола AOB, рис. 261) и $\bar{y}=\frac{1}{2}x+2$ (прямая CD). Черта над буквой y поставлена для того, чтобы отличить ординату прямой от ординаты параболы при той же абсциссе. По условию должны иметь $y<\bar{y}$, т. е. точки параболы должны лежать ниже точек прямой с той же абсциссой. График показывает, что соответствующие куски линий

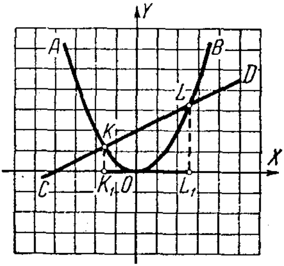


Рис. 261.

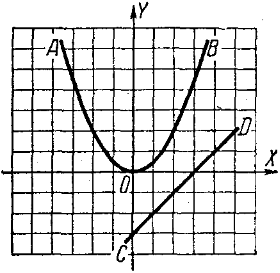


Рис. 262.

AOB и CD (дуга KOL и отрезок KL) лежат над (жирным) отрезком K_1L_1 оси абсцисс (концы K_1 и L_1 исключаются). Прочитывая абсциссы точек K и L, находим (приближенное) решение $-1{,}6<x<2{,}6$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{1}{2}x^2<x-3$

Строим (рис. 262) графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ (парабола AOB) и $\bar{y}=x-3$ (прямая CD). Должно быть $y<\bar{y}$. Между тем парабола AOB целиком лежит над прямой CD. Данное неравенство не имеет решений.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{1}{2}x^2>x-3$. Построение то же, что в предыдущем примере. Но теперь должно быть $y>\bar{y}$; поэтому данное неравенство — тождественное.

Пример 6. Решить систему неравенств:

$$x+4\leqslant x^2\leqslant 6-x; \qquad \frac{1}{2}x^2>\frac{3}{2}-\frac{1}{4}x.$$

Вместо двух первых неравенств можно написать равносильные $\frac{1}{2}x+2 \leqslant \frac{1}{2}x^2 \leqslant 3-\frac{1}{2}x$. Строим (рис. 263) графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ (парабола AOB); $y'=\frac{1}{2}x+2$ (прямая CD); $y''=3-\frac{1}{2}x$ (прямая UV); $\bar{y}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}x$ (прямая EF).

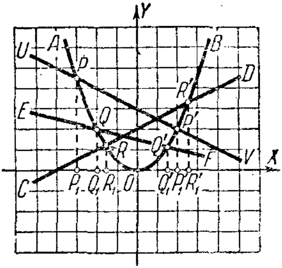


Рис. 263.

Первые два неравенства требуют, чтобы дуга параболы проходила выше прямой CD и ниже прямой UV или имела общие точки с этими прямыми. Этим на параболе выделяется дуга RP (включающая концы R, P), а на оси абсцисс — отрезок R_1P_1. Третье неравенство требует, чтобы дуга параболы проходила также выше прямой EF. Этим из дуги RP выделяется дуга QP (включая конец P и исключая конец Q), а на оси абсцисс — отрезок P_1Q_1. Прочитывая абсциссы точек Q, P, имеем: $-3 \leqslant x < -2$.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-4} < 0$.

Это неравенство имеет место в двух случаях:

1) когда $x^2+x-6<0$ и вместе с тем $x^2-x-4>0$,

2) когда $x^2+x-6>0$ и вместе с тем $x^2-x-4<0$.

В первом случае имеем $x+4<x^2<6-x$. Решение этой системы (см. пример 6) графически представляется отрезком P_1R_1 (концы P_1 и R_1 исключаются). Во втором случае имеем $x+4>x^2>6-x$. Решая эту систему так же, как предыдущую, находим дугу $P'R'$ параболы AOB и соответствующий ей отрезок $P'_1R'_1$ оси абсцисс (концы P'_1 и R_1 исключаются). Прочитывая абсциссы точек P, R, P' R', находим, что данное неравенство удовлетворяется 1) при $-3<x<-1{,}6$; 2) при $2<x<2{,}6$.

Пример 8. Решить неравенство $2^x<4x$.

Строим графики функции $y=2^x$ (кривая UV на рис. 258, стр. 405) и функции $\bar{y}=4x$ (прямая AB). По условию должно быть $y<\bar{y}$, т. е. точки на кривой UV должны лежать ниже точек на прямой AB. Прочитывая абсциссы точек A и B, находим решение: $0{,}3<x<4$.

§ 11. Понятие о предмете аналитической геометрии

В элементарной геометрии решение каждой отдельной задачи требует большей или меньшей изобретательности, и часто задачи, весьма схожие друг с другом, требуют совершенно различных приемов решения, которые нелегко угадать. Возьмем, например, задачу: найти геометрическое место таких точек M, расстояния которых MA до данной точки A равны расстояниям MB до данной точки B. Искомое геометрическое место есть, как известно, прямая линия (перпендикуляр через середину AB). Но способ, которым в элементарной геометрии обычно решается эта задача, не годится для следующей задачи: *найти геометрическое место точек M, расстояние которых MA до точки A вдвое больше расстояния MB до точки B.*

Аналитическая геометрия, созданная одновременно двумя французскими учеными — Декартом (1596 — 1650) и Ферма (1601 — 1655), дает *единообразные приемы решения геометрических задач* и сводит решение широкого круга задач к немногим методически применяемым способам. *Для достижения этой цели все данные и искомые точки и линии относят к некоторой системе координат* (принципиально безразлично, как ее выбрать, но удачный выбор упрощает решение задачи). Выбрав систему координат, мы можем каждую точку охарактеризовать ее координатами, а каждую линию — уравнением, графиком которого эта линия является. Этим данная геометрическая задача сводится к алгебраической, а для решения алгебраических задач мы располагаем хорошо разработанными общими методами.

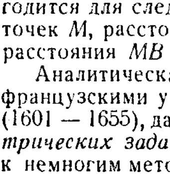


Рис. 264.

Для пояснения вышесказанного рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Окружность радиуса r отнесена к системе координат XOY (рис. 264), в которой центр ее C имеет абсциссу $OQ = a$ и ординату $QC = b$. Составить уравнение этой окружности.

Пусть $M(x, y)$ есть произвольная точка окружности ($x = OP$; $y = PM$). По определению окружности, длина отрезка MC всегда равняется постоянной величине r. Выразим MC через постоянные координаты a, b центра C и переменные координаты x, y точки M. Из рис. 264 имеем:

$$MC = \sqrt{CR^2 + RM^2} = \sqrt{(OP - OQ)^2 + (PM - QC)^2} = \\ = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{1}$$

Это уравнение представляет окружность; иными словами, графиком уравнения (1) служит окружность.

Пример 2. Найти геометрическое место точек M, для которых $MA=2MB$ (A и B — две заданные точки; расстояние между ними обозначим через $2l$).

Возьмем начало координат в середине O отрезка AB и направим одну из осей (OX на рис. 265) вдоль AB. Чтобы записать условие $MA=2MB$ в виде уравнения между координатами точки $M(x, y)$, выразим MA и MB через координаты. Из треугольника MBP имеем:

$$MB=\sqrt{PB^2+PM^2}=\sqrt{(OB-OP)^2+PM^2}=$$
$$=\sqrt{(l-x)^2+y^2}.$$

Точно так же из треугольника AMP найдем $MA=$ $=\sqrt{(x+l)^2+y^2}$, и условие $MA=2MB$ примет вид

$$\sqrt{(x+l)^2+y^2}=2\sqrt{(l-x)^2+y^2}.$$

После упрощений получим:

$$x^2-\frac{10}{3}lx+y^2+l^2=0. \tag{2}$$

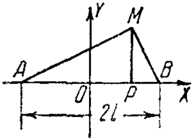


Рис. 265.

Искомое геометрическое место есть график этого уравнения, и методы аналитической геометрии позволяют сразу сказать, что этот график есть *окружность*. В этом легко убедиться, сопоставив уравнение (2) с уравнением (1). Придав уравнению (2) форму

$$\left(x-\frac{5}{3}l\right)^2+y^2=\left(\frac{4}{3}l\right)^2.$$

мы видим, что оно есть частный случай уравнения (1) при $a=\frac{5}{3}l$; $b=0$; $r=\frac{4}{3}l$. Значит, наше геометрическое место есть окружность с центром в точке $C\left(\frac{5}{3}l, 0\right)$ и с радиусом $r=\frac{4}{3}l$.

§ 12. Предел

Постоянная величина *a* называется *пределом* переменной величины x, если эта переменная при своем изменении неограниченно приближается к a[1]).

Существенно иметь в виду, что при рассмотрении *самой по себе взятой переменной величины* не может быть речи о разыскании ее предела. Если же рассматриваются две переменные величины и одна есть функция другой, то для одной из них (аргумента) можно задать предел, а для другой — искать его (если он существует).

Пример 1. Переменные x, y связаны зависимостью $y=\frac{x^2-4}{x-2}$; найти предел y, когда x имеет пределом число 6.

Будем неограниченно приближать переменную x к числу 6 каким-либо способом; например, будем давать x значения 6,1; 6,01; 6,001 и т. д.; мы найдем для y значения 8,1; 8,01; 8,001 и т. д.; эти значения неограниченно приближаются к числу 8. То же окажется, если x неограниченно приближать к числу 6 *любым другим способом*, например полагать $x=5{,}9$; 6,01; 5,999; 6,0001 и т. д. Поэтому, когда x имеет пределом 6, y имеет пределом 8. Запись:

$$\lim_{x\to 6} y = 8$$

или

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-4}{x-2}=8.$$

Буквы lim представляют сокращение французского слова limite (лимит), означающего «предел». Полученный результат в данном случае мы могли бы найти, подставив $x=6$ в выражение $y=\frac{x^2-4}{x-2}$. В следующем примере этот способ не приводит к успеху.

Пример 2. Дано

$$y=\frac{x^2-1}{x-2}.$$

[1]) Приводимое определение не вполне строго, так как выражение «неограниченно приближается» нуждается в логическом уточнении. Уточнить его надлежащим образом коротко и вместе с тем ясно вряд ли возможно. На нижеприводимых примерах его смысл выясняется в той степени, которая необходима для понимания сути дела. Приводимые в элементарных учебниках определения по необходимости всегда страдают такой же неполнотой, хотя зачастую на вид могут показаться более точными.

Найти $\lim\limits_{x\to 2} y$. Подставив $x=2$ в выражение $\frac{x^2-4}{x-2}$, найдем неопределенное выражение $\frac{0}{0}$ (II, 23). Между тем вычисления, подобные проделанным в примере 1, покажут, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Этот результат можно было бы получить еще так: имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

Когда $x\neq 2$, можно сократить последнюю дробь на $x-2$ (при $x=2$ сокращение неправомерно!). Получаем $y=x+2$ (при $x\neq 2$). Будем неограниченно приближать x к 2, *не давая* ему значения 2; тогда y, оставаясь равным $x+2$, неограниченно приближается к 4.

Рассмотренную нами задачу иногда формулируют так: «найти истинное значение выражения $\frac{x^2-4}{x-2}$ при $x=2$» или «раскрыть неопределенность $\frac{x^2-4}{x-2}$ при $x=2$». Точный смысл этих выражений состоит в том, что ищется $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

В рассмотренном примере «раскрытие неопределенности» достигается сокращением дроби $\frac{x^2-4}{x-2}$ на $x-2$ с последующей подстановкой $x=2$. Но и этот прием далеко не всегда ведет к цели.

§ 13. Бесконечно малая и бесконечно большая величины

Переменная величина, предел которой равен нулю, называется *бесконечно малой*.

Пример 1. Переменная величина $\sqrt{x+3}-2$ есть бесконечно малая, *если x стремится к* 1, ибо

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-2)=0$$

Переменная величина, неограниченно возрастающая по абсолютному значению, называется *бесконечно большой*.

Пример 2. Переменная величина $\frac{x}{x-5}$ есть бесконечно большая величина, *если x стремится к* 5.

Бесконечно большая величина *не имеет предела*. Однако принято говорить, что бесконечно большая величина «стремится к бесконечному пределу». Сообразно с этим пишут:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x}{x-5} = \infty. \qquad (1)$$

Знак ∞ (бесконечность) не означает какого-либо числа, и равенство (1), носящее условный характер, выражает лишь то, что при неограниченном приближении x к 5 абсолютная величина дроби $\frac{x}{x-5}$ неограниченно растет. При этом дробь $\frac{x}{x-5}$ может принимать как положительные значения (когда $x > 5$), так и отрицательные (когда $x < 5$).

Замечание. В иных случаях бесконечно большая величина может принимать только положительные (или только отрицательные) значения. Так, при бесконечно малом x величина $\frac{1}{x^2}$ бесконечно велика; но и при $x > 0$ и при $x < 0$ величина $\frac{1}{x^2}$ положительна. Это выражают записью

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Напротив, величина $-\frac{1}{x^2}$ всегда отрицательна. Поэтому пишут

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

В соответствии с этим результат примера 2 записывается также следующим образом:

$$\lim_{x\to 5} \frac{x}{x-5} = \pm\infty,$$

Пример 3. Запись

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$$

означает, что, когда x бесконечно велико (т. е. когда x неограниченно растет по абсолютной величине), величина $\frac{x-1}{x}$ стремится к пределу 1. Символ $x \to \infty$ читают: «x стремится к бесконечности».

Пример 4. Выражение «площадь круга есть предел площади правильного вписанного многоугольника при бесконечно большом числе сторон» означает, что при неограниченном возрастании числа сторон упомянутого многоугольника площадь его неограниченно приближается к площади круга.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. ТАБЛИЦЫ

II. АРИФМЕТИКА

III. АЛГЕБРА

IV. ГЕОМЕТРИЯ

А. Геометрические построения

Б. Планиметрия

В. Стереометрия

V. ТРИГОНОМЕТРИЯ

VI. ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ

Марк Яковлевич Выгодский

Справочник по элементарной математике

М., 1966 г., 424 стр. с илл.